PERIODICAL UNIVERSITY OF HAWAII LIBRARY

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

NEUE FOLGE
DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK
UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON
J. RADON
WIEN

SCHRIFTLEITUNG
N. HOFREITER
WIEN

58. BAND, 2. HEFT
(AUSGEGEBEN IM MAI 1954)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1954

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 300 bis 400 Seiten vereinigt werden. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität Wien, IX., Strudlhofgasse 4,

zu senden; alle geschäftlichen Mitteilungen an

Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5, Tel. U 26 5 60 Serie, Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Weglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Die Abbildungen, deren Zahl möglichst klein gehalten werden soll, sind dem Manuskript auf gesonderten Blättern beizugeben. Sie können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur mit Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Autorenkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie zehn Prozent der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Der Verlag

58. Band/2. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Reiter, H. Über L^1-Räume auf Gruppen I. 73

Carlitz, L. Congruence Properties of Special Elliptic Functions 77

Pötzl, H. Über Sternkörper im dreidimensionalen Raum 91

Plattner, P. A. Die charakteristische Funktion von Hilbert für Potenzen von Hauptklassenidealen 103

Prachar, K. Über ein Resultat von A. Walfisz 114

Prachar, K. Bemerkung zu einer Arbeit von Erdös und Renyi und Berichtigung 117

Lochs, G. Die Konvergenzradien einiger zur Lösung transzendenter Gleichungen verwendeter Potenzreihen 118

Buchbesprechungen 123

Über L^1-Räume auf Gruppen I.

Von

Hans Reiter, Wien.

(Eingelangt am 5. Januar 1954.)

In der vorliegenden Arbeit wird ein Satz, der früher nur für *Abelsche* lokalkompakte Gruppen aufgestellt wurde[1], für *beliebige* lokalkompakte Gruppen bewiesen. Die Beschränkung auf Abelsche Gruppen war bedingt durch die Verwendung der Fouriertransformation; es soll nun gezeigt werden, wie der Beweis ganz allgemein geführt werden kann.

Sei G eine lokalkompakte Gruppe[2]; wir bezeichnen, wie gewöhnlich, mit $L^1(G)$ den Banachschen Raum[3] der komplexwertigen Funktionen auf G, die in Bezug auf das (linksinvariante) Haarsche Maß integrierbar sind, mit der Norm $\| f \|_1 = \int_G | f(x) | \, dx$.

Sei nun g eine abgeschlossene Untergruppe von G und G/g der homogene Raum, der aus den linken Nebenklassen $x' = xg$ $(x \in G)$ besteht; wenn g Normalteiler von G ist, so ist G/g selbst eine (lokalkompakte) Gruppe, doch soll die Untersuchung ganz allgemein geführt werden[4].

Wir nehmen nun an, daß in G/g ein *invariantes* Maß existiert (d. h. invariant in Bezug auf die Transformationen $xg \to sxg$, $s \in G$); die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß für $\sigma \in g$

$$\Delta(\sigma) = \delta(\sigma)$$

gilt, wo Δ die sogenannte Modulfunktion von G, δ diejenige von g ist[2].

---

[1] *H. J. Reiter*, Investigations in harmonic analysis, Transactions of the American Mathematical Society 73, 401—427 (1952), Theorem 1.3.

[2] Die Grundlage für die folgenden Ausführungen ist *A. Weils* Buch: L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Paris 1940 (2e éd. 1953), insbesondere § 8 und 9; siehe auch *Lynn H. Loomis*, An introduction to abstract harmonic analysis, New York 1953, chap. VI, § 33.

[3] $L^1(G)$ ist sogar eine Banachsche Algebra in Bezug auf die Faltung, doch soll diese Eigenschaft vorläufig *nicht* benutzt werden.

[4] Ein Beispiel eines homogenen Raumes ist die Kugeloberfläche (siehe besonders *C. Chevalley*, Theory of Lie Groups I, Princeton 1946, S. 32).

Für $f(x) \in L^1(G)$ definieren wir[1]

$$T(f(x)) = f'(x') = \int_g f(x\,\xi)\,d\xi;$$

dann ist $f'(x') \in L^1(G/g)$ und (bei entsprechender Normierung des Maßes auf G/g)

$$\int_{G/g} f'(x')\,dx' = \int_G f(x)\,dx,$$

daher $$\|f'\|_1 \leqq \|f\|_1.$$

Die Abbildung $f \to f'$ von $L^1(G)$ in $L^1(G/g)$ ist also linear und stetig. Wir wollen ihren „Kern" K_0 näher untersuchen (d. h. den (abgeschlossenen) linearen Unterraum aller Funktionen in $L^1(G)$, die auf das Nullelement von $L^1(G/g)$ abgebildet werden).

Wir betrachten[5] die Menge aller Funktionen $k(x)$ von der Form

$$k(x) = f(x\sigma)\,\delta(\sigma) - f(x), \tag{1}$$

wo $f(x)$ eine beliebige Funktion in $L^1(G)$ und σ eine beliebiges Element von g ist. Dann gilt

$$T(k) = \int_g k(x\xi)\,d\xi = \int_g \{f(x\xi\sigma)\,\delta(\sigma) - f(x\xi)\}\,d\xi = 0,$$

da $\delta(\sigma) \int_g f(x\xi\sigma)\,d\xi = \int_g f(x\xi)\,d\xi$ ist; also ist $k(x) \in K_0$.

Definition: Es sei K der abgeschlossene lineare Unterraum von $L^1(G)$, der von *allen* Funktionen der Form (1) aufgespannt wird.

Es gilt also $K \subset K_0$; um zu zeigen, daß $K = K_0$, bestimmen wir[1] die Funktionen $\varphi \in L^\infty(G)$, die zu K orthogonal sind.

Eine Funktion $\varphi \in L^\infty(G)$ ist dann und nur dann zu K orthogonal, wenn sie die Eigenschaft hat:

$$\varphi(x\,\sigma^{-1}) = \varphi(x)$$

„fast überall" in Bezug auf x, für jedes $\sigma \in g$.

Beweis: Sei $\varphi \perp K$, d. h.

$$\int_G \{f(x\sigma)\,\delta(\sigma) - f(x)\}\,\overline{\varphi(x)}\,dx = 0 \tag{2}$$

für *alle* $f \in L^1(G)$, $\sigma \in g$. Nun gilt aber

---

[5] Hier ist der erste Unterschied gegenüber dem früheren Beweis. Zum Zwecke des leichteren Verständnisses mag es gut sein, den jetzigen Beweis auf Abelsche Gruppen zu spezialisieren, wo die beiden Modulfunktionen identisch 1 sind, oder gar auf die additive Gruppe der reellen Zahlen mit der Untergruppe der ganzen Zahlen; vgl. auch die Bemerkung am Schluß der Arbeit.

$$\int_G f(x\sigma)\,\overline{\varphi(x)}\,dx = \Delta(\sigma^{-1}) \int_G f(x)\,\overline{\varphi(x\sigma^{-1})}\,dx$$

und daher, da ja $\Delta(\sigma) = \delta(\sigma)$ ist,

$$\int_G f(x)\,\{\overline{\varphi(x\sigma^{-1})} - \overline{\varphi(x)}\}\,dx = 0. \tag{3}$$

Da dies für *alle* $f \in L^1(G)$ gilt, folgt $\varphi(x\sigma^{-1}) = \varphi(x)$ „fast überall" in Bezug auf x; die Umkehrung beweist man ebenso einfach, indem man aus (3) rückwärtsschließend (2) herleitet.

Jetzt können wir beweisen, daß $K_0 \subset K$, indem wir zeigen: aus $\varphi \perp K$ folgt $\varphi \perp K_0$.

Sei $f_0(x) \in K_0$, d. h,

$$\int_g f_0(x\,\xi)\,d\,\xi = 0.$$

Dann gilt

$$\int_G f_0(x)\,\overline{\varphi(x)}\,dx = \int_{G/g} dx' \int_g f_0(x\,\xi)\,\overline{\varphi(x\,\xi)}\,d\,\xi.$$

Ist nun $\varphi \perp K$, dann ist, wie eben gezeigt, $\varphi(x)$ konstant auf jeder Nebenklasse xg, stellt also eine Funktion $\varphi'(x')$ auf G/g dar, so daß die rechte Seite gleich

$$\int_{G/g} dx'\,\overline{\varphi'(x')} \int_g f_0(x\,\xi)\,d\,\xi = 0$$

ist. Es ist also $K_0 \subset K$, d. h. $K_0 = K$.

Jetzt zeigt man, genau wie früher[1], daß für beliebiges $f \in L^1(G)$

$$\operatorname{dist}\{f, K\} = \|f'\|_1,$$

und damit ist das folgende allgemeine Ergebnis gewonnen:

Sei G eine lokalkompakte Gruppe, g eine abgeschlossene Untergruppe von G, G/g der entsprechende homogene Raum. Wenn auf G/g ein invariantes Maß existiert, dann ist der Banachsche Raum $L^1(G/g)$ algebraisch isomorph mit dem Quotientenraum $L^1(G)/K$, wo K der oben definierte durch g bestimmte abgeschlossene lineare Unterraum von $L^1(G)$ ist, und diese Isomorphie ist isometrisch (bei entsprechender Normierung des Maßes auf G/g).

Weiter kann man beweisen:

Ist g Normalteiler von G, dann besteht die Isomorphie

$$L^1(G/g) \simeq L^1(G)/K$$

auch für $L^1(G/g)$ und $L^1(G)$ als Banachsche Algebren[6].

---

[6] Das bedeutet insbesondere, daß K ein (zweiseitiges) *Ideal* in $L^1(G)$ ist.

Es ist zu zeigen[7], daß die Abbildung

$$f \to f' = T(f) = \int_g f(x\,\xi)\,d\,\xi$$

die Eigenschaft hat:

$$T(f_1 * f_2) = T(f_1) * T(f_2),$$

wobei der Stern die Faltung bedeutet.

Seien zunächst f_1, f_2 zwei *stetige* Funktionen in $L^1(G)$, die außerhalb einer *kompakten* Menge verschwinden; dann gilt

$$\int_g d\,\xi \int_G f_1(y)\,f_2(y^{-1}\,x\,\xi)\,d\,y = \int_G f_1(y)\,d\,y \int_g f_2(y^{-1}\,x\,\xi)\,d\,\xi.$$

Nun ist $\int_g f_2(y^{-1}\,x\,\xi)\,d\,\xi = f_2'(y'^{-1}\,x')$ eine Funktion auf der Faktorgruppe G/g, also ist die rechte Seite

$$= \int_{G/g} dy'\,f_2'(y'^{-1}\,x') \int_g f_1(y\,\eta)\,d\,\eta$$
$$= \int_{G/g} f_1'(y')\,f_2'(y'^{-1}\,x')\,dy'.$$

Da die stetigen Funktionen, die außerhalb von kompakten Mengen verschwinden, in $L^1(G)$ dicht sind und die Abbildung stetig ist, folgt die Behauptung für beliebige Funktionen in $L^1(G)$ und der Beweis ist fertig.

Bemerkung: Bei der Definition von K kann man im Falle, daß g Normalteiler von G ist, (1) ersetzen durch

$$k(x) = f(\sigma\,x) - f(x); \tag{1'}$$

die Rechnung möge der Leser selbst ausführen.

[7] Hier ist der zweite Unterschied gegenüber dem früheren Beweis.

Congruence Properties of Special Elliptic Functions.

By

L. Carlitz, Durham, NC., USA.

(Received January 11, 1954.)

1. Introduction. Let $sn\, x = sn\,(x, u)$ denote the Jacobi elliptic function, where $u = k^2$ in the standard notation. Put

$$sn\, x = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1}(u) \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \qquad (A_1(u) = 1), \tag{1.1}$$

where the $A_{2m+1}(u)$ are polynomials in u with integral coefficients; also put

$$\frac{x}{sn\, x} = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{2m}(u) \frac{x^{2m}}{(2m)!} \qquad (\beta_0(u) = 1), \tag{1,2}$$

so that the $\beta_{2m}(u)$ are polynomials in u with rational coefficients. Let p denote a fixed prime $\geqq 3$. The writer has proved [2] that

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} A_p^{r-s}(u)\, A_{m+s(p-1)}(u) \equiv 0 \pmod{p^r} \quad (m \geqq r); \tag{1.3}$$

it is understood that (1.3) implies that after expansion the coefficient of each power of u is congruent to 0 (mod p^r). Also we have

$$p\beta_{r(p-1)}(u) \equiv -A_p^r(u) \pmod{p}; \tag{1.4}$$

in particular the denominator of $\beta_{r(p-1)}$ contains only the first power of p; $\beta_m(u)$ is integral (mod p) when $p - 1 \nmid m$. Corresponding to (1.3) we have

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} A_p^{r-s}(u)\, \tau_{m+s(p-1)}(u) \equiv 0 \pmod{p^r} \quad (m > r), \tag{1.5}$$

where $\tau_m(u) = \beta_m(u)/m$ and $p - 1 \nmid m$; moreover

$$\beta_m(u) \equiv 0 \pmod{p^r} \qquad (p^r \mid m,\ p - 1 \nmid m). \tag{1.6}$$

In the next place it was proved [1] that when the function $sn\, x$ admits of complex multiplication, then certain additional results hold.

Let the period quotient belong to an imaginary quadratic field of discriminant d and let k^2 denote the corresponding *singular* modulus. We write

$$\alpha_m = A_m(k^2), \quad \beta_m = \beta_m(k^2), \quad \tau_m = \beta_m(k^2)/m. \tag{1.7}$$

Let the odd prime p be such that the Legendre symbol $(d/p) = -1$. Then in the first place $\alpha_p \equiv 0 \pmod{p}$ and β_m is integral (mod p) for all values of m. We have also

$$\alpha_m \equiv 0 \pmod{p^r} \qquad (m \geqq pr) \tag{1.8}$$

and

$$\tau_m \equiv 0 \pmod{p^r} \qquad (m > pr,\ p^2 - 1 \nmid m); \tag{1.9}$$

moreover (1.9) yields

$$\beta_m \equiv 0 \pmod{p^{r+s}} \qquad (m > pr,\ p^2 - 1 \nmid m). \tag{1.10}$$

On the other hand when $p^2 - 1 \mid m$ we get

$$\beta_m \equiv 0 \pmod{p^{r-1}} \qquad (m > pr). \tag{1.11}$$

In the present paper we adopt a somewhat different point of view. It is known that [2, § 6]

$$A_p(u) \equiv (-1)^{1/2(p-1)} W_p(u) \pmod{p},$$

where

$$W_p(u) = \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s}^2 u^s \qquad (p = 2m + 1). \tag{1.12}$$

If for fixed p, we let k^2 denote a root of $W_p(u) = 0$, then k^2 is an algebraic integer. We define α_m, β_m, τ_m by means of (1.7). Clearly $\alpha_p \equiv 0 \pmod{p}$ and we may ask what this implies for α_m, β_m, τ_m. We make free use of (1.3), (1.4), (1.5), (1.6) but, on the other hand, shall not assume any of the results (1.7), ..., (1.11) that were proved by means of the assumption that *sn x* was a *singular* elliptic function. The following results are obtained.

$$\alpha_m \equiv 0 \pmod{p^r} \qquad (m \geqq pr), \tag{1.13}$$

as well the generalization (2.8) below;

$$\tau_m \equiv 0 \pmod{p^r} \qquad (m > pr,\ p - 1 \nmid m), \tag{1.14}$$

which implies

$$\beta_m \equiv 0 \pmod{p^{r+t}} \qquad (m > pr,\ p - 1 \nmid m,\ p^t \mid m); \tag{1.15}$$

on the other hand when $p - 1 \mid m$ we get

$$\beta_m \equiv 0 \pmod{p^{r-1}} \qquad (m > pr). \tag{1.16}$$

It is of interest to compare (1.13), ..., (1.16) with the corresponding results, (1,8), ..., (1.11). In particular it may be pointed out that the proof of (1.10) and (1.11) makes use of complex multiplication; while in proving (1.15) and (1.16) we use only the real multiplication formulas. Indeed except for §§ 6 and 7 the present paper does not require complex multiplication.

For generalizations of (1.15) and (1.16) see § 5. The corresponding generalizations in the singular case are given in § 6.

It is evident that the polynomial $W_p(u)$ defined by (1.12) is closely related to the Legendre polynomial. We discuss this correspondence in § 7.

2. Congruences for α_m. As indicated above, we assume that k^2 satisfies the equation

$$W_p(k^2) = 0 \tag{2.1}$$

so that k^2 is an algebraic integer. Then it is clear that $\alpha_m = A_m(k^2)$ is also an algebraic integer and in particular

$$\alpha_p \equiv 0 \pmod{p}. \tag{2.2}$$

In the next place, for $u = k^2$, (1.3) becomes

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} \alpha_p^{r-s} \alpha_{m+s(p-1)} \equiv 0 \pmod{p^r} \qquad (m \geqq r). \tag{2.3}$$

If $U_{m,r}$ denotes the left member of (2.3) then

$$\alpha_{m+r(p-1)} = \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} \alpha_p^{r-s} U_{m,s}.$$

Hence, using (2.2) and (2.3) we get

$$\alpha_{m+r(p-1)} \equiv 0 \pmod{p^r} \qquad (m \geqq r),$$

or more simply

$$\alpha_m \equiv 0 \pmod{p^r} \qquad (m \geqq pr). \tag{2.4}$$

Thus we have obtained a congruence exactly like (1.8).

It is of interest to extend this result to the coefficients of [2, Theorem 5]

$$sn^h x\, cn^{h'} x\, dn^{h''} x = \sum_{m=0}^{\infty} L_m(u)\, x^m/m!, \tag{2.5}$$

where h, h', h'' are integers and $h \geqq 0$. In place of (1.3) we have the more general

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} A_p^{r-s}(u)\, L_{m+s(p-1)}(u) \equiv 0 \pmod{p^r} \quad (m \geqq r). \tag{2.6}$$

If we put $\lambda_m = L_m(k^2)$, then λ_m is an algebraic integer and (2.6) reduces to

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} \alpha_p^{r-s} \lambda_{m+s(p-1)} \equiv 0 \pmod{p^r} \qquad (m \geqq r). \tag{2.7}$$

Then exactly as before we get

$$\lambda_m \equiv 0 \pmod{p^r} \qquad (m \geqq pr). \tag{2.8}$$

We may state

Theorem 1. *Let* k^2 *satisfy* $W_p(k^2) = 0$ *where* $W_p(u)$ *is defined by* (1.12). *Then* $\alpha_m = A_m(k^2)$ *satisfies* (2.4). *More generally if* $L_m(u)$ *is defined by means of* (2.6) *then* $\lambda_m = L_m(k^2)$ *satisfies* (2.8).

3. Congruences for β_m. In (1.4) take $r = 1$ so that

$$p\beta_{p-1} = p\beta_{p-1}(k^2) \equiv \alpha_p \pmod{p},$$

and therefore by (2.2)

$$p\beta_{p-1} \equiv 0 \pmod{p}. \tag{3.1}$$

In other words β_{p-1} is integral (mod p). We now turn to (1.5) which becomes

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} \alpha_p^{r-s} \tau_{m+s(p-1)} \equiv 0 \pmod{p^r} \qquad (m > r), \tag{3.2}$$

where $\tau_m = \tau_m(k^2) = \beta_m(k^2)/m$, provided $p - 1 \nmid m$. If we let $V_{m,r}$ denote the left member of (3.2) then exactly as in the proof of (2.4) we get

$$\tau_{m+r(p-1)} = \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} \alpha_p^{r-s} V_{m,s}.$$

Therefore by (2.2) and (3.2) it follows that

$$\tau_{m+r(p-1)} \equiv 0 \pmod{p^r} \qquad (m > r),$$

or more compactly

$$\tau_m \equiv 0 \pmod{p^r} \qquad (m > pr,\ p - 1 \nmid m). \tag{3.3}$$

In comparing this result with (1.9) it should be noted that the hypothesis in the present case is stronger. We state

Theorem 2. *With the hypothesis of Theorem* 1, $\tau_m = \tau_m(k^2) = \beta_m(k^2)/m$ *satisfies* (3.3)

By means of (3.3) we may immediately infer congruences for β_m. Indeed we have

Theorem 3. *With the hypothesis of Theorem* 1, $\beta_m = \beta_m(k^2)$ *satisfies*

$$\beta_m \equiv 0 \pmod{p^{r+t}} \quad (m > pr,\ p - 1 \nmid m,\ p^t \mid m). \tag{3.4}$$

For example for $m = 2p$, $p > 3$, (3.4) implies $\beta_{2p} \equiv 0 \pmod{p^2}$, while for $m = 2p^t$ we get

$$\beta_{2p^t} \equiv 0 \pmod{p^{2p^{t-1}+t}} \qquad (p > 3). \tag{3.5}$$

Similarily (2.4) implies

$$\alpha_{mp^t} \equiv 0 \pmod{p^{mp^{t-1}}}, \tag{3.6}$$

where m is an arbitrary integer. A like result holds for the more general coefficient λ_m defined by (2.5).

4. Application of the real multiplication formula. The complex multiplication formulas used in [1, § 2] are of course not now available. However we shall make use of the real multiplication formulas. Then as in [2, § 7], we have the following general formula

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} A_p^{r-s}(u)\, \gamma_{m+s(p-1)}(u) \equiv 0 \pmod{p^r} \quad (m > r), \tag{4.1}$$

where

$$\gamma_m(u) = \frac{1 - n^m}{m} \beta_m(u) \tag{4.2}$$

and n is an arbitrary integer not divisible by p. It is known that the coefficients of $\gamma_m(u)$ are integral (mod p). Now put $u = k^2$, $\gamma_m = \gamma_m(k^2)$; then (4.1) becomes

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} \alpha_p^{r-s} \gamma^{(n)}_{m+s(p-1)} \equiv 0 \pmod{p^r} \qquad (m > r) \tag{4.3}$$

and by a familiar argument we get for all n such that $p \nmid n$,

$$\gamma_m \equiv 0 \pmod{p^r} \qquad (m > pr). \tag{4.4}$$

Let $p - 1 \mid m$ but let us assume that $p \nmid m$. Then it is familiar that n can be chosen so that $(1 - n^m)/m \not\equiv 0 \pmod{p}$. If we write (4.4) in the fuller form

$$\frac{1 - n^m}{m} \beta_m \equiv 0 \pmod{p^r} \qquad (m > pr,\ p \nmid n) \tag{4.5}$$

it therefore follows that

$$\beta_m \equiv 0 \pmod{p^{r-1}} \qquad (m > pr). \tag{4.6}$$

This proves

Theorem 4. *If the hypothesis of Theorem* 1 *is satisfied and in addition* $p - 1 \mid m$ *but* $p \nmid m$, *then* β_m *satisfies* (4.6).

The condition $p \nmid m$ in Theorem 4 can be removed without much trouble. Indeed let $p^t \mid m$ but $p^{t+1} \nmid m$; also as before let $p - 1 \mid m$.

Then $1 - n^m \equiv 0 \pmod{p^{t+1}}$; however for properly chosen n it is clear that $1 - n^m \not\equiv 0 \pmod{p^{t+2}}$. Consequently (4.5) implies

$$\beta_m \equiv 0 \pmod{p^{r-1}} \qquad (m > pr). \tag{4.7}$$

We state

Theorem 5. *If the hypothesis of Theorem* 1 *is satisfied and in addition* $(p-1)\,p \mid m$ *then* (4.7) *holds.*

It therefore follows that (4.7) holds whenever $p - 1 \mid m$.

It may be remarked that while (4.7) is somewhat weaker than (3.4), yet it implies divisibility of β_m by large powers of p. For example for $m = (p-1)\,p^t$, (4.7) becomes

$$\beta_{(p-1)\,p^t} \equiv 0 \pmod{p^{(p-1)\,p^{t-1}-2}} \qquad (t \geqq 1),$$

while (3.4) yields

$$\beta_{\frac{1}{2}(p-1)\,p^t} \equiv 0 \pmod{p^{\frac{1}{2}(p-1)\,p^{t-1}+t-1}} \qquad (t \geqq 1).$$

5. Some generalizations. We recall that the real multiplication formulas [3, p. 197] imply

$$sn\,nx = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j(u)\,sn^{2j+1}x \qquad (Q_0(u) = n), \tag{5.1}$$

where n is an arbitrary integer and the $Q_j(u)$ denote polynomials in u with integral coefficients. Put

$$\left(\frac{x}{sn\,x}\right)^h = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{2m}^{(h)}(u)\,\frac{x^{2m}}{(2m)!} \qquad (\beta_0^{(h)}(u) = 1), \tag{5.2}$$

where h is an integer $\geqq 1$ and the $\beta_{2m}^{(h)}$ are polynomials in u with ration coefficients; comparing (5.2) with (1.2) we see that $\beta_{2m}^{(1)}(u) = \beta_{2m}(u)$. Let p denote a prime such that $p \nmid n$ and consider

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{sn\,x}\right)^h - \left(\frac{nx}{sn\,nx}\right)^h &= \left(\frac{x}{sn\,nx}\right)^h \left\{\left(\frac{sn\,nx}{sn\,x}\right)^h - n^h\right\} \\ &= \left(\frac{x}{sn\,nx}\right)^h \left\{\left(\sum_{j=0}^{\infty} Q_j(u)\,sn^{2j}\,x\right)^h - n^h\right\} \\ &= \frac{x^h}{(sn\,nx)^{h-2}} \sum_{j=0}^{\infty} Q_j^*(u)\,sn^{2j}\,x,\end{aligned}$$

where the $Q_j^*(u)$ denote polynomials in u with integral coefficients. Again applying (5.1) we infer that

$$\left(\frac{x}{sn\,x}\right)^h - \left(\frac{nx}{sn\,nx}\right)^h = \frac{x}{(sn\,x)^{h-2}} \sum_{j=0}^{\infty} R_j(u)\,sn^{2j}\,x, \tag{5.3}$$

where the $R_j(u)$ denote polynomials in u with coefficients that are integral (mod p). If we denote the left member of (5.3) by $f_1(x)$ we next consider

$$f_2(x) = n^2 f_1(x) - f_1(nx). \tag{5.4}$$

Applying (5.1) it is clear that $f_2(x)$ can be expanded exactly as in the right member of (5.3) except that the denominator will be $sn^{h-4} x$. On the other hand by (5.2)

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - n^{2m})\, \beta_{2m}^{(h)}(u) \frac{x^{2m}}{(2m)!},$$

$$f_2(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (1 - n^{2m})(n^2 - n^{2m})\, \beta_{2m}^{(h)}(u) \frac{x^{2m}}{(2m)!},$$

and so on. Continuing in this way we see that if $l = [\frac{1}{2}(h+1)]$, the greatest integer $\leqq \frac{1}{2}(h+1)$, then on the one hand we get

$$\sum_{n=l}^{\infty} (1 - n^{2m})(n^2 - n^{2m}) \ldots (n^{2l-2} - n^{2m})\, \beta_{2m}^{(h)}(u) \frac{x^{2m}}{(2m)!} \tag{5.5}$$

on the other hand we have a series of the form

$$x^h \sum_{j=0}^{\infty} R_j(u)\, sn^{2j} x, \tag{5.6}$$

where as in (5.3) the $R_j(u)$ are polynomials with coefficients that are integral (mod. p). Comparing (5.5) and (5.6) we get the following theorem for the function (1.1) — valid without any special hypothesis.

Theorem 6. *Let $h \geqq 1$, $l = [\frac{1}{2}(h+1)]$, p prime $\geqq 3$, $p \nmid n$; then for $2m \geqq h$*

$$\gamma_{2m}^{(h)}(u) = \frac{(1 - n^{2m})(1 - n^{2m-2}) \ldots (1 - n^{2m-2l+2})}{2m\,(2m-1) \ldots (2m-h+1)}\, \beta_{2m}^{(h)}(u) \tag{5.7}$$

is a polynomial in u with coefficients integral (mod p). *Moreover we have*

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} A_p^{r-s}(u)\, \gamma_{2m+s(p-1)}^{(h)}(u) \equiv 0 \pmod{p^r} \quad (2m \geqq r+h). \tag{5.8}$$

For $h = 1$, (5.7) and (5.8) are of course familiar. It is interesting to observe that

$$\gamma_{2m}^{(2)}(u) = \frac{1 - n^{2m}}{2m\,(2m-1)}\, \beta_{2m}^{(2)}(u)$$

and therefore introducing the hypothesis of Theorem 1 we see that $\beta_{2m}^{(2)} = \beta_{2m}^{(2)}(k^2)$ has properties very much like those of β_{2m}. More generally

if we suppose $h<p-1$ and if m is such that $2m \not\equiv 0, 2, \ldots, 2l-2 \pmod{p-1}$, then for n a primitive root (mod p) it follows that the product

$$(1-n^{2m})(1-n^{2m-2})\ldots(1-n^{2m-2l+2}) \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Consequently we may state

Theorem 7. *Let* $1 \leqq h < p-1, l=[\frac{1}{2}(h+1)]$, p *prime* $\geqq 3$; $2m \not\equiv 0, 2, \ldots, 2l-2 \pmod{p-1}$. *Then*

$$\tau_{2m}^{(h)}(u) = \frac{1}{2m(2m-1)\ldots(2m-h+1)}\beta_{2m}^{(h)}(u) \tag{5.9}$$

is a polynomial with coefficients that are integral (mod p). *Moreover if*

$$2m(2m-1)\ldots(2m-h+1) \equiv 0 \pmod{p^t}, \tag{5.10}$$

then

$$\beta_{2m}^{(h)}(u) \equiv 0 \pmod{p^t}. \tag{5.11}$$

Theorem 8. *With the hypothesis of Theorem* 7 *we have*

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}A_p^{r-s}(u)\,\tau_{m+s(p-1)}^{(h)}(u) \equiv 0 \pmod{p^r} \quad (m \geqq r+h). \tag{5.12}$$

We now put $u=k^2$, where $W_p(k^2)\equiv 0$; we also put $\beta_m^{(h)}=\beta_m^{(h)}(k^2)$, $\tau_m^{(h)}=\tau_m^{(h)}(k^2)$. Then (5.12) becomes

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}\alpha_p^{r-s}\,\tau_{m+s(p-1)}^{(h)} \equiv 0 \pmod{p^r} \qquad (m \geqq r+h)$$

and by a familiar argument we get

Theorem 9. *If the hypothesis of Theorem* 1 *and Theorem* 7 *are satisfied then*

$$\tau_m^{(h)} \equiv 0 \pmod{p^r} \qquad (m \geqq pr+h), \tag{5.13}$$

and consequently

$$\beta_m^{(h)} \equiv 0 \pmod{p^{r+t}} \qquad (m \geqq pr+h). \tag{5.14}$$

When the residue of $2m$ (mod $p-1$) is in the range $0, 2, \ldots, 2l-2$, we proceed as in the proof of Theorem 4 and 5. We have first from (5.8)

$$\gamma_m^{(h)} = \gamma_m^{(h)}(k^2) \equiv 0 \pmod{p^r} \qquad (m > pr). \tag{5.15}$$

Now suppose $2m \equiv 2a \pmod{p-1}$, $0 \leqq a \leqq l-1$ and let t be the largest exponent for which (5.10) is satisfied; also let p^s be the largest power of p dividing $2m-2a$. Then as in the proof of Theorem 5 by proper choice of n we can assert that $1-n^{2m-2a}$ is divisible by exactly

p^{z+1}. The remaining factors $1 - n^{2m-2i}$ are prime to p. If we write (5.15) in the fuller form (compare (5.7)).

$$\frac{(1-n^{2m})(1-n^{2m-2})\dots(1-n^{2m-2l+2})}{2m(2m-1)\dots(2m-h+1)}\beta_m^{(h)}$$

we see that

$$\beta_m^{(h)} \equiv 0 \pmod{p^{r+t-z-1}} \qquad (m \geqq pr+h). \tag{5.16}$$

Incidentally the proof only requires that $h \leqq p-1$. This proves.

Theorem 10. *If the hypothesis of Theorem* 1 *is satisfied and* $1 \leqq h \leqq p-1$, $l = [\frac{1}{2}(p-1)]$, p *prime* $\geqq 3$; $2m \equiv 2a \pmod{p-1}$, $0 \leqq a \leqq l-1$; $p^z \mid 2m-2a$, $p^{z+1} \nmid 2m-2a$; t *is the largest exponent for which* (5.10) *holds; then* $\beta_m^{(h)}$ *satisfies* (5.16).

We shall not take the space to develop the corresponding results in which larger values of h occur.

6. Generalizations in the singular case. We now briefly consider the analogs of Theorems 8 and 9 for singular elliptic functions. The notation is that of [1]. Let the period quotient belong to the imaginary quadratic field of discriminant d and let k^2 denote the corresponding singular modulus. Put

$$\Omega = R(\theta, k^2) \qquad (\theta^2 = d), \tag{6.1}$$

where R is the rational field. If $\mu = a + b\theta$, where a, b are rational integers, $a^2 - b^2 d \equiv 1 \pmod 2$, then [1, § 2]

$$sn\,\mu x = \sum_{r=0}^{\infty} N_r\, sn^{2r+1} x \qquad (N_0 = \mu), \tag{6.2}$$

where the N_r are integers of Ω except possibly for prime ideal divisors of (2). Proceeding exyctly as in § 5, put

$$\left(\frac{x}{sn\,x}\right)^h = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{2m}^{(h)} \frac{x^{2m}}{(2m)!} \qquad (h \geqq 1),$$

and

$$\gamma_{2m}^{(h)} = \frac{(1-\mu^{2m})(1-\mu^{2m-2})\dots(1-\mu^{2m-2l+2})}{2m(2m-1)\dots(2m-h+1)}\beta_{2m}^{(h)}, \tag{6.3}$$

where $l = [\frac{1}{2}(h+1)]$. We find that

$$\sum_{2m \geqq h} \gamma_{2m}^{(h)} \frac{x^{m-h}}{(2m-h)!} = \sum_{r=0}^{\infty} M_r\, sn^r x, \tag{6.4}$$

where the M_r are of the same nature as the N_r in (6.2). It follows that

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}a_p^{r-s}\gamma_{2m+s(p-1)}^{(h)}\equiv 0 \pmod{p^r} \qquad (2m\geqq r+h),$$

and from this we get.

$$\gamma_m^{(h)}\equiv 0 \pmod{p^r} \qquad (m\geqq pr+h); \tag{6.5}$$

The discussion now differs somewhat from that of § 5, since when $(d/p)=-1$ we may assume that μ in (6.5) belongs to the exponent $p^z(p^2-1)$, where z is at our disposal. We thus obtain the following results.

Theorem 11. *Let* $1\leqq h<p^2-1$, $l=[\frac{1}{2}(p-1)]$, $(d/p)=-1$; $2m\not\equiv 0, 2, \ldots, 2l-2 \pmod{p^2-1}$. *Also let* p^t *be the highest power of* p *dividing*

$$2m(2m-1)\ldots(2m-h+1) \tag{6.6}$$

Then we have

$$\beta_m^{(h)}\equiv 0 \pmod{p^{r+t}} \qquad (m\geqq pr+h). \tag{6.7}$$

Theorem 13. *Let* $1\leqq h\leqq p^2-1$, $l=[\frac{1}{2}(p-1)]$, $(d/p)=-1$; $2m\equiv 2a \pmod{p^2-1}$, $0\leqq a\leqq l-1$; let p^z *be the highest power of* p dividing $2m-2a$ *and* p^t *the highest power of* p *dividing* (6.6). *Then we have*

$$\beta_m^{(h)}\equiv 0 \pmod{p^{r+t-s-1}} \qquad (m\geqq pr+h). \tag{6.8}$$

In particular when $h=2$ the results are very similer to those in the case $h=1$; however the exponent t when $h=2$ may be larger than the corresponding exponent for $h=1$. Hence $\beta_m^{(2)}$ may be divisible by a somewhat larger power of p. This remark applies to both (6.7) and (6.8).

7. The polynomial $W_p(u)$. We now return to the polynomial $W_p(u)$ defined in (1.12). The connection with the Legendre polynomial P_m, where $p=2m+1$, can be seen as follows. We have

$$W_p(u)=\sum_{s=0}^{m}\binom{m}{s}^2 u^s\equiv F(-m, m+1; 1; u) \pmod{p},$$

where $F(a, b; c; u)$ is the hypergeometric function. Recalling the well-known formula [5, p. 311]

$$P_m(1-2x)=F(-m, m+1; 1; x),$$

we see that

$$W_p(u)\equiv P_m(1-2u) \pmod{p}. \tag{7.1}$$

Alternatively, if we use the formula [4, p. 67]

$$P_m(x) = 2^{-m} \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s}^2 (x+1)^s (x-1)^{m-s}$$

$$\equiv 2^{-m} (x+1)^m \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s}^2 \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^s$$

$$\equiv 2^{-m} (x-1)^m \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s}^2 \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^s \pmod{p},$$

we get

$$W_p(u) \equiv (1-u)^m P_m\left(\frac{1+u}{1-u}\right) \equiv (u-1)^m P_m\left(\frac{u-1}{u+1}\right) \pmod{p}. \quad (7.2)$$

In applying the theorems of this paper it is of interest to know something about the factorization of $W_p(u) \pmod{p}$. Now in the first place when $k^2 = -1$ (the case of the lemniscate function), we have $\alpha_p \equiv 0 \pmod{p}$ if and only if $p \equiv 3 \pmod 4$. Hence for such p it is clear that $W_p(u)$ has the factor $u+1$. By (7.1) this is equivalent to the congruence $P_m(3) \equiv 0 \pmod{p}$. On the other hand if we take $u = \frac{1}{2}$ in the first of (7.2) we get $W_p(\frac{1}{2}) \equiv 2^m P_m(3) \equiv 0$, while if we take $u = 2$ in last term of (7.2) we get $W_p(2) \equiv P_m(3) \equiv 0$. That is we have

$$W_p(-1) \equiv W_p(\tfrac{1}{2}) \equiv W_p(2) \equiv 0 \pmod{p}$$

and therefore $W_p(u)$ has the three linear factors $x+1$, $x-\frac{1}{2}$, $x-2 \pmod{p}$. To illustrate these and some later results we exhibit the first few polynomials $W_p(u)$ together with their factorization.

$$W_3(u) = u+1, \qquad W_5(u) = u^2 - u + 1,$$

$$W_7(u) = u^3 + 2u^2 + 2u + 1 \equiv (u+1)(u-\tfrac{1}{2})(u-2) \pmod 7,$$

$$W_{11}(u) = u^5 + 3u^4 + u^3 + u^2 + 3u + 1$$
$$\equiv (u+1)(u-\tfrac{1}{2})(u-2)(u^2 - u + 1) \pmod{11},$$

$$W_{13}(u) = u^6 - 3u^5 + 4u^4 - 3u^3 + 4u^2 - 3u + 1$$
$$\equiv (u^2 - 6u + 1)(u^2 - u + 3)(u^2 + 4u - 4) \pmod{13},$$

$$W_{17}(u) \equiv u^8 - 4u^7 + 2u^6 + 8u^5 + 4u^4 + 8u^3 + 2u^2 - 4u + 1$$
$$\equiv (u^2 - 3u + 1)(u^2 - u - 1)(u^2 + u - 1)(u^2 - u + 1) \pmod{17},$$

$$W_{19}(u) = u^9 + 5u^8 + 4u^7 + 7u^6 + 11u^5 + 11u^4 + 7u^3 + 4u^2 + 5u + 1$$
$$\equiv (u+1)(u-\tfrac{1}{2})(u-2)(u^2 + 4u + 1)(u^2 - u - 3)(u^2 - 6u + 6) \pmod{19},$$

$$W_{23}(u) = u^{11} + 6u^{10} - 11u^9 - 7u^8 - 5u^7 + 4u^6$$
$$+ 4u^5 - 5u^4 - 7u^3 - 11u^2 + 6u + 1$$
$$\equiv (u+1)(u-2)(u-12)(u-3)(u-8)(u+7)(u+10)$$
$$\cdot (u-11)(u+2)(u^2 - u + 1) \pmod{23}.$$

It is known [4, p. 139] that the discriminant of $P_m(x)$ is determined by

$$D_m = 2^{-m(m-1)} \prod_{r=1}^{m} r^{3r-m} (m+r)^{m-r}. \tag{7.3}$$

From (7.1) and (7.3) it is evident that $W_p(u)$ has no repeated factors (mod p).

In the next place it follows from (7.1) and (7.2) that

$$W_p(u) \equiv (1-u)^m W_p\left(\frac{u}{u-1}\right), \quad W_p(u) \equiv (-1)^m W_p(1-u) \pmod{p}, \tag{7.4}$$

and (1.12) implies

$$W_p(u) = u^m W_p(1/u). \tag{7.5}$$

Thus if an irreducible factor of $W_p(u)$ (mod p) is known it may be possible to find additional ones. Thus for example, given the factor $u^2 - 6u + 1$ of $W_{13}(u)$ (mod 13), (7.4) leads to

$$u^2 - 6u(u-1) + (u-1)^2 = -4u^2 + 4u + 1 \equiv -4(u^2 - u + 3),$$

while (7.5) applied to $u^2 - u + 3$ gives $u^2 + 4u - 4$. Thus the complete factorization of $W_{13}(u)$ is determined. Similarly given the factor $u^2 - 3u + 1$ of $W_{17}(u)$ (mod 17) we get $u^2 - u - 1$ and $u^2 + u - 1$; the remaining factor $u^2 - u + 1$ is found by division. Incidentally the factor $u^2 - u + 1$ is invariant under the transformations induced by (7.4) and (7.5).

The discovery of irreducible factors of $W_p(u)$ of low degree may be facilitated by using a few special singular moduli. For example consider the well-known results [5, p. 525]

$$\begin{aligned} k &= 2^{1/2} - 1 && (K' = 2^{1/2} K), \\ k &= \sin {}^1/_{12}\pi && (K' = 3^{1/2} K), \\ k &= \tan^2 {}^1/_8 \pi && (K' = 2K), \end{aligned} \tag{7.6}$$

where K, K' have their usual significance.

From the first of (7.6) we get $k^4 - 6k^2 + 1 = 0$, that is, k^2 is a root of $u^2 - 6u + 1 = 0$. Applying [1, Theorem 2] we may state

Theorem 13. *If the Legendre symbol* $(-2/p) = -1$, *then* $Q_1(u) = u^2 - 6u + 1$ *is a factor* (mod p) *of* $W_p(u)$. *The quadratic* $Q_1(u)$ *is irreducible* (mod p) *if and only if* $(2/p) = -1$.

The theorem is evidently verified for $p = 5, 7, 13$.

From the second of (7.6) we get after a little manipulation that k^2 is a root of $u^2 - u + 1/16 = 0$. This yields

Theorem 14. *If* $(-3/p) = -1$, *then* $Q_2(u) = u^2 - u + 1/16$ *is a factor* (mod p) of $W_p(u)$. *The quadratic* $Q_2(u)$ *is irreducible* (mod p) *if and only if* $(3/p) = -1$.

Thus for $p = 5$, $Q_2(u)$ reduces to $u^2 - u + 1$; for $p = 11$, it reduces to $u^2 - u + 2 \equiv (u + 1)(u - 1)$ (mod 11); for $p = 17$, it reduces to $u^2 - u - 1$.

From the third of (7.6) a little computation shows that k^2 is a root of $u^2 - 34u + 1$. This proves

Theorem 15. *If* $(-1/p) = -1$, $p > 3$, *then* $Q_3(u) = u^2 - 34u + 1$ *is a factor* (mod p) *of* $W_p(u)$. *The quadratic* $Q_3(u)$ *is irreducible* (mod p) *if and only if* $(2/p) = -1$.

Thus for $p = 7$, we get $u^2 + u + 1 \equiv (u-2)(u - 4)$ (mod 7); for $p = 11$, we get $u^2 - u + 1$; for $p = 17$, we get $u^2 + 4u + 1$, all of which are in agreement with the theorem.

The case $p = 23$ is interesting in view of the large number of linear factors of $W_{23}(u)$ (mod 23). In the first place, since $23 \equiv 3$ (mod 4), we get the three linear factors $u + 1$, $u - 2$, $u - 12$. Secondly Theorem 13 yields $u^2 - 6u + 1 \equiv (u + 10)(u + 7)$ (mod 23). Third Theorem 14 gives $u^2 - u - 10 \equiv (u - 8)(u + 7)$ while Theorem 15 yields $11u + 1 \equiv (u - 3)(u - 8)$ (mod 23). Thus in all four additional linear factors $u + 10$, $u + 7$, $u - 8$, $u - 3$ are predicted.

Additional theorems like the above can be obtained by using other singular moduli but we shall not take the space to do so. We conclude with the following result which is proved by direct methods.

Theorem 16. *If* $(-3/p) = -1$, *then* $Q_4(u) = u^2 - u + 1$ *is a factor* (mod p) *of* $W_p(u)$.

To prove the theorem we note that (7.4) implies

$$W_p(u) \equiv (u - 1)^m W_p\left(\frac{-1}{u - 1}\right) \pmod{p}. \tag{7.7}$$

Since $(-3/p) = -1$ is equivalent to $p \equiv 2$ (mod 3) it follows that $m \equiv 2$ (mod 3). Let

$$\alpha = \frac{-1}{\alpha - 1}, \quad \text{or} \quad \alpha^2 - \alpha + 1 \equiv 0 \pmod{p}. \tag{7.8}$$

Since $u^2 - u + 1$ is irreducible (mod p), α is an element of the finite field $GF(p^2)$. Now the assumption $(\alpha - 1)^m = 1$ implies $(-\alpha)^m = 1$; on the other hand (7.8) gives $\alpha^3 = 1$. Thus α belongs to the exponent 3 and consequently $3/2m$, which is a contradiction. Hence (7.7) and (7.8)

imply $W_p(\alpha) \equiv 0$; in other words $u^2 - u + 1$ is a factor (mod p) of $W_p(u)$.

References.

1. *L. Carlitz*, The coefficients of singular elliptic functions, Mathematische Annalen vol. 127 (1954).
2. *L. Carlitz*, Congruences connected with the power series expansions of the Jacobi elliptic functions, Duke Mathematical Journal, vol. 20 (1953), pp. 1—12.
3. *R. Fricke*, Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen, Leipzig and Berlin, vol. 2, 1922.
4. *G. Szegö*, Orthogonal polynomials, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 23, New York, 1938.
5. *E. T. Whittaker* and *G. N. Watson*, A course in modern analysis, fourth edition, Cambridge, 1927.

Duke University.

Über Sternkörper im dreidimensionalen Raum.

Von

Hans Pötzl, Wien.

(Eingelangt am 11. Januar 1954.)

K. Mahler [2] hat eine Methode zur Auffindung der kritischen Gitter eines Sternbereiches im zweidimensionalen Raum in endlich vielen Schritten angegeben. In den ersten drei §§ wird gezeigt, daß sich die Methode von *Mahler* auf Sternbereiche im dreidimensionalen Raum übertragen läßt. Dabei wird die Verwandtschaft mit der Methode von *H. Minkowski* deutlich ersichtlich, die dasselbe Problem für konvexe Körper löst.

In § 4 wird eine Verallgemeinerung der Methode von *J. W. S. Cassels* [1] auf den dreidimensionalen Raum untersucht und gezeigt, warum eine einfache Übertragung des Satzes hier nicht möglich ist.

Es sollen die kritischen Gitter beschränkter symmetrischer Sternbereiche, deren Rand aus endlich vielen analytischen Teilen besteht, in endlich vielen Schritten ermittelt werden. Dabei gehen wir davon aus, daß drei linear unabhängige Gitterpunkte jedes kritischen Gitters auf dem Rand des Bereiches liegen müssen. Wir haben demnach zuerst alle Punkte auf dem Rand des Sternbereiches zu ermitteln, die als Gitterpunkte kritischer Gitter in Frage kommen und zweitens zu diesen Punkten alle entsprechenden Gitter zu suchen. Letzteres geschieht in § 1. Es werden dort alle Gitter bestimmt, die drei gegebene Punkte des Randes als Gitterpunkte enthalten und zulässig sind (d. h. kein Gitterpunkt darf im Innern des Sternbereiches liegen). Es wird gezeigt, daß es nur endlich viele solche Gitter gibt. Die Bestimmung aller Gitterpunkte kritischer Gitter auf dem Rand des Sternbereiches wird in § 2 auf eine Extremalaufgabe zurückgeführt. In § 3 werden nach der Zahl der Gitterpunkte des kritischen Gitters auf dem Rand des Sternbereiches verschiedene Fälle unterschieden. Es wird die Bestimmung aller dieser Gitterpunkte in endlich vielen Schritten durchgeführt. Aus den Punkten können nach § 1 die Gitter ermittelt werden.

§ 1.

Ein beschränkter Sternbereich B mit analytischem Rand C im dreidimensionalen Raum R_3 hat folgende Eigenschaften: Es gibt 2 Kugeln Γ_R und Γ_r um den Ursprung o mit den Radien R und $r \neq 0$, so daß $\Gamma_R \supseteq B \supseteq \Gamma_r$ erfüllt ist. Wenn $\mathfrak{p}$ ein Punkt in B ist, so liegt auch $-\mathfrak{p}$ in B. B ist ein abgeschlossener Bereich. Auf jedem Halbstrahl durch o liegt genau ein Punkt von C. C ist eine geschlossene stetige Fläche. C kann folgendermaßen zerlegt werden: in endlich viele analytische Flächen- und Bogenstücke und endlich viele singuläre Punkte. Wir numerieren alle diese Teilbereiche von C durch, und bezeichnen den i-ten mit T_i. Alle T_i seien abgeschlossen.

Wenn jeder Gitterpunkt $\mathfrak{g}$ eines Gitters Λ in der Gestalt $\mathfrak{g} = \omega_1 \mathfrak{q}_1 + \omega_2 \mathfrak{q}_2 + \omega_3 \mathfrak{q}_3$ dargestellt werden kann, wobei ω_1, ω_2, ω_3 ganze Zahlen und $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}_3$ 3 Gitterpunkte sind, so nennen wir $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}_3$ eine Basis des Gitters. Der Absolutbetrag der Determinante $(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_3)$ heißt Determinante des Gitters $d(\Lambda)$. Sie ist von $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}_3$ unabhängig, d. h. 3 beliebige Gitterpunkte $\mathfrak{g}_1'$, $\mathfrak{g}_2'$, $\mathfrak{g}_3'$ bilden dann und nur dann eine Basis, wenn $|(\mathfrak{g}_1', \mathfrak{g}_2', \mathfrak{g}_3')| = d(\Lambda)$ ist. Der Index dreier Gitterpunkte $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ ist gegeben durch $\operatorname{ind}(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) = \dfrac{|(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3)|}{d(\Lambda)}$. Sind $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ 3 l. u. Gitterpunkte, so ist ihr Index eine natürliche Zahl. $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ sind dann und nur dann eine Basis, wenn $\operatorname{ind}(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) = 1$ ist. Ist $\operatorname{ind}(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) > 1$, so gibt es nach dem Satz über Adaption eines Gitters nach drei Gitterpunkten immer eine Basis $\mathfrak{q}_1'$, $\mathfrak{q}_2'$, $\mathfrak{q}_3'$ der Gestalt

$$\mathfrak{q}_i' = \sum_{k=1}^{3} \lambda_{ik} \mathfrak{p}_k \text{ mit } \lambda_{ik} = 0 \text{ für } k > i \text{ und } 0 \leqq \lambda_{ik} \leqq \lambda_{ii} \text{ für } k < i. \tag{1}$$

Wir wollen in diesem § alle zulässigen Gitter ermitteln, die drei gegebene Punkte $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ auf C als Gitterpunkte enthalten. Wir können jedes solche Gitter nach $\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ adaptieren, so daß es durch eine Gitterbasis $\mathfrak{q}_i'$ nach Gleichung (1) dargestellt werden kann, wobei $\lambda_{11} = 1$ ist, weil die Gitterpunkte auf C sichtbar sein müssen, wenn das Gitter zulässig sein soll. Aus (1) ergibt sich

$$\mathfrak{p}_i = \sum_{k=1}^{3} u_{ik}' \mathfrak{q}_k'; \text{ dabei sind } u_{ik}' \text{ ganze Zahlen, } u_{ik}' = 0 \text{ für } k > i, u_{11}' = 1. \tag{2}$$

Durch Transformation der Gitterbasis $\mathfrak{q}_i'$ nach

$$\mathfrak{q}_i' = \sum_{k=1}^{3} v_{ik} \mathfrak{q}_k \text{ mit } v_{ii} = \pm 1, v_{ik} = 0 \text{ für } k > i, \tag{3}$$

können wir bei geeigneter Wahl der v_{ik} immer erreichen, daß

$$\mathfrak{p}_i = \sum_{k=1}^{3} u_{ik}\, \mathfrak{q}_k \tag{4}$$

wird, wobei $u_{ik} = 0$ für $k > i$, $u_{11} = 1$, $0 \leqq u_{ik} < u_{ii}$ für $k < i$ und $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}_3$ eine Basis des Gitters ist. Für die Gitterpunkte $\mathfrak{g}$ des Gitters ergibt sich aus (4)

$$\mathfrak{g} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i'\, \mathfrak{q}_i = \frac{\sum_{i=1}^{3} \omega_i\, \mathfrak{p}_i}{\prod_{i=1,2,3} u_{ii}}, \tag{5}$$

wobei ω_i, ω_i' ganze Zahlen sind, die

$$\sum_{i=1}^{3} u_{ik}\, \omega_i \equiv 0 \quad (\Pi\, u_{ii}) \tag{5a}$$

erfüllen. Durchlaufen die ω_i unter Beachtung von (5a) alle ganzen Zahlen, so erhalten wir genau alle Gitterpunkte von Λ. Nun erfüllt aber der Index dreier Gitterpunkte $\mathfrak{p}_i$ eines B-zulässigen Gitters, die auf C liegen, die Ungleichung

$$\operatorname{ind}(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) \leqq \frac{R^3}{\Delta(\Gamma_r)} = \sqrt{2}\,(R/r)^3, \tag{6}$$

wobei $\Delta(\Gamma_r)$ die kritische Determinante der Kugel um $\mathfrak{o}$ mit dem Radius r ist; denn es ist wegen $\Gamma_R \supseteq B \supseteq \Gamma_r$ die Determinante $|(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3)| \leqq R^3$, andererseits $d(\Lambda) \geqq \Delta(\Gamma_r)$, weil Λ B-zulässig und daher auch Γ_r-zulässig ist.

Wir wenden (6) auf die Gitterpunkte $\mathfrak{p}_i$ aus (4) an:

$$\operatorname{ind}(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3) = \prod_{i=1}^{3} u_{ii} \leqq \sqrt{2}\,(R/r)^3. \tag{7}$$

Wenn man dazu noch (4) berücksichtigt, so sieht man ein, daß alle u_{ik} beschränkt sind; also gibt es nur endlich viele Möglichkeiten die u_{ik} zu wählen. Es ist noch zu zeigen, daß man auch die B-Zulässigkeit jedes so gefundenen Gitters in endlich vielen Schritten überprüfen kann. Es ist zu untersuchen, ob einer der nach (5) gebildeten Gitterpunkte $\mathfrak{g}$ in B liegt. Wegen $\Gamma_R \supseteq B$ genügt es, die Gitterpunkte in Γ_R zu untersuchen. Damit ein Gitterpunkt aus Gleichung (5) in Γ_R liegt, muß $\operatorname{ind}(\mathfrak{g}, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_k) \leqq \sqrt{2}\,(R/r)^3$ erfüllt sein, wobei i und k unabhängig voneinander die Zahlen 1, 2, 3 durchlaufen. Die Begründung ist dieselbe wie für Gleichung (6). Durch Einsetzen des Ausdruckes aus (4) für $\mathfrak{g}$ ergibt sich für $l = 1, 2, 3$

$$\{|\omega_l| \cdot |\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3)|\} : \{\prod_{i=1}^{3} u_{ii} \cdot |(\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_3)|\} = |\omega_l| \leqq \sqrt{2}\,(R/r)^3 \quad (8)$$

Nur die endlich vielen Gitterpunkte, die diese Ungleichung erfüllen, müssen untersucht werden. Unser Ergebnis ist also

Satz 1: Zu drei vorgegebenen l. u. Gitterpunkten auf C gibt es nur endlich viele B-zulässige Gitter, die in endlich vielen Schritten ermittelt werden können.

Zu jedem der so ermittelten Gitter gehört also ein Wertesystem u_{ik}, welches wir einen Gittertypus nennen. Wir bezeichnen die Gittertypen mit $G_1, G_2, \ldots, G_\varepsilon$; ε ist eine endliche, nur von R und r abhängige Zahl.

§ 2.

Wir wollen die Auffindung von drei l. u. Gitterpunkten eines kritischen Gitters, die auf C liegen, auf ein Extremalproblem zurückführen. Wir nehmen drei Punkte $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ auf C an und fragen, wann diese Gitterpunkte eines kritischen Gitters sind. Eine Parameterdarstellung von C sei

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\sigma, \tau). \quad (9)$$

Entsprechend den am Anfang von § 1 gemachten Voraussetzungen über C können wir die Parameterdarstellung σ, τ stetig bis auf endlich viele Punkte wählen. Mit A bezeichnen wir den abgeschlossenen Definitionsbereich von (σ, τ). Der Sternbereich B selbst habe die Gleichung

$$f(\mathfrak{x}) \leqq 1. \quad (10)$$

Es ist also $f[\mathfrak{x}(\sigma, \tau)] \equiv 1$ für $(\sigma, \tau) \subset A$.

Die 3 Punkte auf C haben die Gestalt

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{x}(\sigma_i, \tau_i), \; i = 1, 2, 3. \quad (11)$$

Nach § 1 gibt es nur endlich viele zulässige Gitter mit Gitterpunkten in $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$. Zu jedem solchen Gitter gehört eines der möglichen Wertesysteme $G_1, G_2, \ldots, G_\varepsilon$ für u_{ik}; die Gitterpunkte $\mathfrak{g}$ eines zu G_α mit $u_{ik} = (u_{ik})_\alpha$ gehörigen Gitters Λ_α ergeben sich nach (5) und (5a); wenn sie für alle Punkte mit $|\omega_i| \leqq \sqrt{2}\,(R/r)^3$ nicht im Innern von B liegen, ist das Gitter zulässig, d. h.

$$f(\mathfrak{g}) \geqq 1 \text{ für alle } \mathfrak{g} \text{ mit } |\omega_i| \leqq \sqrt{2}\,(R/r)^3 \quad (12)$$

ist zu erfüllen.

Die Determinante von Λ_α ist nach § 1

$$d(\Lambda_\alpha) = \frac{\left| (\mathfrak{x}(\sigma_1, \tau_1), \mathfrak{x}(\sigma_2, \tau_2), \mathfrak{x}(\sigma_3, \tau_3)) \right|}{(u_{11})_\alpha \cdot (u_{22})_\alpha \cdot (u_{33})_\alpha}. \tag{13}$$

Λ_α kann aber definitionsgemäß nur dann kritisches Gitter sein, wenn es unter allen Gittern, die (12) erfüllen, die kleinste Determinante $d(\Lambda_\alpha)$ hat.

Um die kritischen Gitter zu finden, müssen wir also zunächst das Min $d(\Lambda_\alpha)$ für alle $(\sigma_i, \tau_i) \subset A$, für die (12) erfüllt ist, finden. Wir bezeichnen das unter den Nebenbedingungen (12) für $(\sigma_i, \tau_i) \subset A$ gebildete Minimum von $\left| (\mathfrak{x}(\sigma_1, \tau_1), \mathfrak{x}(\sigma_2, \tau_2), \mathfrak{x}(\sigma_3, \tau_3)) \right|$ mit M_α. Für jeden Gittertypus G_α sind in (12) andere Zahlen $(u_{ik})_\alpha$ einzusetzen, daher liefert i. a. jedes G_α ein anderes M_α. Nach (13) folgt also

Satz 2: Die kritische Determinante $\Delta(B)$ des Körpers B ist das Minimum der Ausdrücke $\dfrac{M_\alpha}{(u_{11})_\alpha (u_{22})_\alpha (u_{33})_\alpha}$ *für* $\alpha = 1, 2, \ldots, \varepsilon$.

Damit ist die Aufgabe auf die Bestimmung von M_α — ein Extremalproblem mit den Nebenbedingungen (12) — zurückgeführt.

§ 3.

Zur Auffindung der Lösung des Extremalproblems aus § 2 sollen nun die zulässigen Gitter nach Zahl und Lage ihrer Gitterpunkte auf C unterschieden werden. Auf diesem Wege wird die Auffindung der Gitterpunkte eines kritischen Gitters auf C gelingen. Wir betrachten die Schar aller zulässigen Gitter Λ_α mit 3 l. u. Gitterpunkten auf C. Mit Λ_α^k bezeichnen wir die Teilschar der Λ_α mit genau k nichtkollinearen Gitterpunkten auf C. Wir erhalten sie, indem wir k Punkte auf C variieren lassen und zu diesen alle zulässigen Gitter bilden, die k solche Punkte als Gitterpunkte enthalten. Λ_α^k zerlegen wir weiter in endlich viele Scharen, bei denen keiner der k Punkte den analytischen Teilbereich T_i von C, auf dem er bei einem Gitter der Schar liegt, verläßt. Zu jeder dieser Scharen bestimmen wir die Gitter mit kleinster Determinante.

a) *Singuläres Gitter* heißt ein kritisches Gitter, das zu Λ_α^3 gehört. Wir betrachten die Teilschar, für die $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}(\sigma_i, \tau_i)$ immer auf $T_{\alpha i}$ liegt $(i = 1, 2, 3)$. Statt σ_i, τ_i führen wir allgemein Ortsparameter ein, die alle $\mathfrak{p}_i$ auf $T_{\alpha i}$ festlegen; wir bezeichnen sie mit $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p$, wobei $p \leqq 6$ ist. Wir schreiben also $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p)$, $i = 1, 2, 3$, wobei $\mathfrak{p}_i(\varrho_1, \ldots, \varrho_p)$ voraussetzungsgemäß analytische Funktionen sind.

Notwendige Bedingung für ein singuläres Gitter: Wenn zu den Punkten $\mathfrak{p}_i(\varrho_1^s, \ldots, \varrho_p^s)$ ein singuläres Gitter Λ_s gehört, so kann keiner

der nach (5) zugehörigen Gitterpunkte $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\varrho_1^s, \ldots \varrho_p^s)$ auf C liegen. Daher gibt es eine Umgebung von $(\varrho_1^s, \varrho_2^s, \ldots, \varrho_p^s)$ so, daß dort die zu $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i(\varrho_1, \ldots, \varrho_p)$ gehörigen Gitter Λ alle zulässig sind. Es ist nach (13)

$$d(\Lambda) = \frac{\left|(\mathfrak{p}_1(\varrho_1, \ldots, \varrho_p), \mathfrak{p}_2(\varrho_1, \ldots, \varrho_p), \mathfrak{p}_3(\varrho_1, \ldots, \varrho_p))\right|}{(u_{11})_\alpha \cdot (u_{22})_\alpha \cdot (u_{33})_\alpha}$$

und

$$d(\Lambda_s) = \frac{\left|(\mathfrak{p}_1(\varrho_1^s, \ldots, \varrho_p^s), \mathfrak{p}_2(\varrho_1^s, \ldots, \varrho_p^s), \mathfrak{p}_3(\varrho_1^s, \ldots, \varrho_p^s))\right|}{(u_{11})_\alpha \cdot (u_{22})_\alpha \cdot (u_{33})_\alpha}$$

Notwendig dafür, daß Λ_s ein singuläres Gitter ist, ist also

$$d(\Lambda_s) \leqq d(\Lambda) \text{ oder } \left|(\mathfrak{p}_1(\varrho_1^s, \ldots, \varrho_p^s), \mathfrak{p}_2(\varrho_1^s, \ldots, \varrho_p^s), \mathfrak{p}_3(\varrho_1^s, \ldots, \varrho_p^s))\right| \leqq$$
$$\leqq \left|(\mathfrak{p}_1(\varrho_1, \ldots, \varrho_p), \mathfrak{p}_2(\varrho_1, \ldots, \varrho_p), \mathfrak{p}_3(\varrho_1, \ldots, \varrho_p))\right| \qquad (14)$$

$(\varrho_1^s, \ldots, \varrho_p^s)$ ist Stelle eines relativen Extrems, daher gilt

$$\frac{\partial}{\partial \varrho_i}(\mathfrak{p}_1(\varrho_1, \ldots, \varrho_p), \mathfrak{p}_2(\varrho_1, \ldots, \varrho_p), \mathfrak{p}_3(\varrho_1, \ldots, \varrho_p)) = 0 \text{ für } (\varrho_1, \ldots, \varrho_p) =$$
$$= (\varrho_1^s, \ldots, \varrho_p^s). \qquad (15)$$

Das sind p Gleichungen für die p Ortsparameter, sie haben daher i. a. nur endlich viele Lösungen. Hat (15) unendlich viele Lösungen, so ist (15) in endlich vielen abgeschlossenen Bereichen für $(\varrho_1, \ldots, \varrho_p)$ identisch erfüllt, weil die $\mathfrak{p}_i(\varrho_1, \ldots, \varrho_p)$ *analytische* Funktionen der Ortsparameter sind. In jedem dieser Bereiche ist dann aber $d(\Lambda)$ konstant, weil alle partiellen Ableitungen identisch verschwinden. Also liefert die Auflösung von (15) nach $\varrho_1^s, \ldots, \varrho_p^s$ nur *endlich viele* Werte für $d(\Lambda_s)$ und es ergeben sich aus den $\mathfrak{p}_i(\varrho_1^s, \ldots, \varrho_p^s)$ nach § 1 die zugehörigen Gitter. Wir ziehen die kleinste unter allen sich ergebenden Gitterdeterminanten weiter in Betracht und bezeichnen sie mit $\Delta(\Lambda^3)$.

Aus (14) folgt sofort ein geometrisches Kennzeichen eines singulären Gitters: Es muß für jede Permutation $(\alpha\,\beta\,\gamma)$ von (1 2 3) die Ebene, die im Endpunkt von $\mathfrak{p}_\alpha$ durch $\mathfrak{p}_\beta$ und $\mathfrak{p}_\gamma$ aufgespannt wird, in einer Umgebung von $\mathfrak{p}_\alpha$ ganz im Innern von B liegen.

b) *Kritische Gitter, die zu Λ_α^k gehören*: ($k \geqq 4$). Die Punkte $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{x}(\sigma_i, \tau_i)$, $i = 1, \ldots, k$, mögen auf C variieren. Wir betrachten die Teilschar vom Gittertypus G_α, für die jedes $\mathfrak{p}_i$ immer auf $T_{\alpha i}$ liegt ($i = 1, 2, \ldots, k$). Statt σ_i, τ_i verwenden wir wieder die Ortsparameter $\varrho_1, \ldots, \varrho_p$ ($p \leqq 2k$), die alle $\mathfrak{p}_i$ auf $T_{\alpha i}$ festlegen: $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i(\varrho_1, \ldots, \varrho_p)$, ($i = 1, 2, \ldots, k$). Aus $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ bilden wir das Gitter nach (4) mit den Koeffizienten $(u_{ik})_\alpha$.

Da $\mathfrak{p}_4, \mathfrak{p}_5, \ldots, \mathfrak{p}_k$ Gitterpunkte dieses Gitters sein sollen, schreiben wir nach (5)

$$\mathfrak{p}_i = \frac{\sum_{j=1}^{3} \omega_{ij}\, \mathfrak{p}_j}{\prod_{j=1}^{3} (u_{jj})_\alpha} \quad \text{mit } |\omega_{ij}| \leqq \sqrt{2}\,(R/r)^3;\ i = 4, 5, \ldots, k.$$

Es gibt nur endlich viele Möglichkeiten, die ω_{ij} zu wählen; die ω_{ij} sind ja beschränkt. Die Wahl der ω_{ij} liefert also endlich viele Teilscharen von Gittern. Wir wählen eine dieser Teilscharen mit $\omega_{ij} = (\omega_{ij})_\alpha$ für die folgenden Betrachtungen aus. Ein Wertesystem $(u_{ik})_{\alpha_1}$ zusammen mit $(\omega_{ij})_{\alpha_2}$ bezeichnen wir als Gittertypus $G_{\alpha_1 \alpha_2}$. Es müssen die folgenden $3\,(k-3)$ Nebenbedingungen für $\varrho_1, \ldots, \varrho_p$ für alle Gitter der Teilschar identisch erfüllt sein:

$$\sum_{j=1}^{3} (\omega_{ij})_\alpha \cdot \mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_i \prod_{j=1}^{3} (u_{jj})_\alpha \text{ für } i = 4, 5, \ldots, k. \tag{16}$$

Notwendige Bedingung dafür, daß ein kritisches Gitter in der Teilschar liegt: Wenn zu $\mathfrak{p}_i\,(\varrho_1^s, \ldots, \varrho_p^s)\ (i = 1, 2, \ldots, k)$ ein kritisches Gitter Λ_s gehört, so kann kein weiterer der nach (5) zugehörigen Gitterpunkte $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}\,(\varrho_1^s, \ldots, \varrho_p^s)$ auf C liegen. Daher gibt es eine Umgebung von $(\varrho_1^s, \varrho_2^s, \ldots, \varrho_p^s)$, in der die ϱ_i unter alleiniger Berücksichtigung von (16) frei variieren können, so daß die zu $\mathfrak{p}_i\,(\varrho_1, \ldots, \varrho_p)$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$ gehörigen Gitter Λ, die nach (4) und (5) mit $u_{ij} = (u_{ij})_\alpha$ und $\omega_{ij} = (\omega_{ij})_\alpha$ gebildet sind, zulässig sind. Die Ausdrücke für $d\,(\Lambda)$ und $d\,(\Lambda_s)$ sind dieselben wie unter a). Notwendig dafür, daß Λ_s kritisches Gitter ist, ist die Erfüllung von (14). Die Stelle $(\varrho_1^s, \ldots, \varrho_p^s)$ ist daher wieder Stelle eines relativen Minimums, aber hier mit Berücksichtigung der Nebenbedingungen (16). Die notwendigen Bedingungen sind daher (16) und für $i = 1, 2, \ldots, p$

$$\frac{\partial}{\partial \varrho_i}\left\{(\mathfrak{p}_1\,(\varrho_1, \ldots, \varrho_p), \mathfrak{p}_2\,(\varrho_1, \ldots, \varrho_p), \mathfrak{p}_3\,(\varrho_1, \ldots, \varrho_p)) + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=4}^{k} \mathfrak{l}_m \left(\sum_{j=1}^{3} (\omega_{mj})_\alpha\, \mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_m \prod_{j=1}^{3} (u_{jj})_\alpha\right)\right\} = 0, \tag{17}$$

wobei die $\mathfrak{l}_m$ Lagrange-Multiplikatoren sind. Die $\mathfrak{l}_m$ sind Vektoren (l_{m1}, l_{m2}, l_{m3}) und werden skalar mit den $\mathfrak{p}_j$ multipliziert. (16) und (17) sind $p + 3\,(k-3)$ Gleichungen für ebensoviel Unbekannte (ϱ_j und l_{mj}), haben also i. a. nur endlich viele Lösungen. Gibt es unendlich viele Lösungen, so schließt man wie unter a), daß sich nur endlich viele

Werte für $d(\Lambda)$ ergeben. Den kleinsten unter ihnen bezeichnen wir mit $\Delta(\Lambda^k)$. Die Gleichungen (15) und (17) liefern uns also *alle Punkte, die als Gitterpunkte kritischer Gitter auf C in Frage kommen.*

(16) sind $3(k-3)$ Bedingungen für p Parameter ($p \leqq 2k$), d. h. es wird für $k \geqq 9$ i. a. von vornherein nur endlich viele Lösungen geben. Gibt es aber unendlich viele Lösungen, so ist (16) in endlich vielen Teilbereichen für $(\varrho_1, \ldots, \varrho_p)$ identisch erfüllt, weil es sich um analytische Bedingungen handelt. Dieser Fall kann dann nach (17) behandelt werden. Wir zeigen noch, daß man sich auf $k \leqq \left(\frac{2R}{r}+1\right)^3$ beschränken kann:

Es gibt kein zulässiges Gitter mit mehr als $\left(\frac{2R}{r}+1\right)^3$ *Gitterpunkten auf C.*

Beweis: Jeder Gitterpunkt auf C liegt in der Kugel Γ_R. Wir legen um jeden Gitterpunkt $\mathfrak{g}$ in Γ_R die Kugel mit der Gleichung $(\mathfrak{x}-\mathfrak{g})^2 \leqq (r/2)^2$, wobei r der Radius der Kugel Γ_r um $\mathfrak{o}$ ist, die ganz in B liegt (s. § 1). Diese Kugeln um die Gitterpunkte haben keinen inneren Punkt gemeinsam, weil das B-zulässige Gitter auch Γ_r-zulässig ist. Sei k die Anzahl der Gitterpunkte in Γ_R, so muß das k-fache Volumen von $\Gamma_{r/2}$ kleiner sein als das Volumen von $\Gamma_{R+r/2}$, woraus sich für k die behauptete Ungleichung ergibt. Das Endergebnis dieses § ist also

Satz 3: $\Delta(B) = Min\, \Delta(\Lambda^k)$, *wo* $3 \leqq k \leqq \left(\frac{2R}{r}+1\right)^3$. $\Delta(\Lambda^k)$ *und die zugehörigen Gitter, somit auch die kritischen Gitter, können in endlich vielen Schritten ermittelt werden.*

§ 4.

Die große Vielfalt der Fallunterscheidungen, die die bisher geschilderte Methode notwendig macht, zeigt, daß es sehr wichtig ist, die Zahl der zu untersuchenden Teilscharen zu reduzieren. Im zweidimensionalen Raum (R_2) wird eine solche Reduktion in den praktisch wichtigsten Fällen durch einen Satz von *Cassels* geleistet. Dieser ermöglicht es häufig festzustellen, ob sich in einer Schar von B-zulässigen Gittern kritische Gitter befinden und er liefert dann alle kritischen Gitter. Um die Möglichkeit einer Verallgemeinerung dieses Satzes zu untersuchen, beweisen wir zunächst im R_2 eine allgemeine Eigenschaft von Parallelogrammen und Gittern, die, wie man leicht einsieht, sofort auf den Satz

von *Cassels* führt und deren Verallgemeinerung auf den dreidimensionalen Raum (R_3) leichter zu untersuchen ist als die des Satzes selbst.

Wir führen zunächst folgende Bezeichnung für alle Parallelogramme H, die den Ursprung als Mittelpunkt haben, ein: Die Vektoren, die vom Ursprung nach den beiden Seitenmitten führen, heißen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, wobei $\mathfrak{q}$ auf $\mathfrak{p}$ im positiven Umlaufsinn (Gegenuhrzeigersinn) folgt. Die Eckpunkte von H sind dann (dem positiven Umlaufsinn entsprechend aufgezählt) $\mathfrak{s} = \mathfrak{p} + \mathfrak{q}$, $\mathfrak{r} = \mathfrak{q} - \mathfrak{p}$, $-\mathfrak{s} = -\mathfrak{p} - \mathfrak{q}$, $-\mathfrak{r} = \mathfrak{p} - \mathfrak{q}$. Das Parallelogramm mit den Eckpunkten $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{q}$ heiße P, das mit den Eckpunkten $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $-\mathfrak{p}$ heiße R; die entsprechende zentralsymmetrisch gelegenen Parallelogramme werden mit $\overline{P}$ und $\overline{R}$ bezeichnet. Es ist dann $H = P + \overline{P} + R + \overline{R}$. Die Strecken $-\mathfrak{p}$, $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{q}$ werden nicht zu R gezählt, wohl aber $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{o}$, $-\mathfrak{p}$ mit Ausnahme der Punkte $\mathfrak{q}$ und $-\mathfrak{p}$ selbst.

Es läßt sich leicht zeigen, daß der Satz von *Cassels* aus folgender Eigenschaft eines beliebigen Parallelogramms im R_2 abgeleitet werden kann:

Satz 4: *Hat ein Gitter Λ zwei lin. unabh. Gitterpunkte $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ in P (wenigstens einer davon liege im Innern von P), dann hat Λ auch mindestens einen vom Ursprung verschiedenen Gitterpunkt in R.*

Diesen Satz wollen wir beweisen und die entsprechenden Verhältnisse im R_3 untersuchen.

Beweis: Es gilt $\mathfrak{g}_1 = \alpha\,\mathfrak{p} + \beta\,\mathfrak{q}$ mit $0 \leqq \alpha, \beta, \gamma, \delta \leqq 1$
$\mathfrak{g}_2 = \gamma\,\mathfrak{p} + \delta\,\mathfrak{q}$

Die Gitterpunkte von Λ enthalten alle Punkte $\mathfrak{g} = \omega_1\,\mathfrak{g}_1 + \omega_2\,\mathfrak{g}_2$, wo ω_1 und ω_2 beliebige ganze Zahlen sind. Daraus folgt $\mathfrak{g} = (\omega_1\,\alpha + \omega_2\,\gamma)\,\mathfrak{p} + (\omega_1\,\beta + \omega_2\,\delta)\,\mathfrak{q}$. Wir betrachten alle $\mathfrak{g}$ in P. Diese Menge enthält $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$, ist also nicht leer; sie enthält nur endlich viele Elemente. Wir können also alle jene Gitterpunkte $\mathfrak{g}_1'$ $(\neq 0)$ ermitteln, für die $\omega_1\,\beta + \omega_2\,\delta$ den kleinsten Wert hat und ebenso die Gitterpunkte $\mathfrak{g}_2'$, für die $\omega_1\,\alpha + \omega_2\,\gamma$ den kleinsten Wert annimmt. $\mathfrak{g}_1'$ und $\mathfrak{g}_2'$ können wir so wählen, daß sie linear unabhängig sind, weil $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ linear unabhängig sind. Es ist

$\mathfrak{g}_1' = \alpha'\,\mathfrak{p} + \beta'\,\mathfrak{q}$ wobei $0 \leqq \beta' \leqq \delta' \leqq 1$
$\mathfrak{g}_2' = \gamma'\,\mathfrak{p} + \delta'\,\mathfrak{q}$ und $0 \leqq \gamma' \leqq \alpha' \leqq 1$ ist.

Wir bilden $\mathfrak{g}_2' - \mathfrak{g}_1' = (\gamma' - \alpha')\,\mathfrak{p} + (\delta' - \beta')\,\mathfrak{q}$ mit $-1 \leqq \gamma' - \alpha' \leqq 0$, $0 \leqq \delta' - \beta' \leqq 1$. $\mathfrak{g}_2' - \mathfrak{g}_1'$ liegt also in R, außer wenn $\gamma' - \alpha' = -1$ oder $\delta' - \beta' = +1$ ist.

a) Wäre $\gamma' - \alpha' = -1$, so wäre $\gamma' = 0$, $\alpha' = 1$, dann liegt schon $\mathfrak{g}_2'$ in R, außer es ist $\delta' = 1$, d. h. $\mathfrak{g}_2' = \mathfrak{q}$. Es muß aber $\mathfrak{g}_1$ oder $\mathfrak{g}_2$ im Innern von P liegen, daher ist $\mathfrak{g}_2' - \mathfrak{g}_1$ oder $\mathfrak{g}_2' - \mathfrak{g}_2$ in R.

b) Ganz analog kann auch für den Fall $\delta' - \beta' = 1$ einen Gitterpunkt im Innern von R konstruieren, w. z. b. w.

Der Satz von *Cassels* zeigt, daß bestimmten Voraussetzungen genügende Scharen von zulässigen Gittern, die von 2 am Rand C des Sternbereiches B variierenden Punkten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ aufgespannt werden, kritische Gitter sind. Dabei liegt $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q} - \mathfrak{p}$ auf C und R liegt ganz im Innern von B. Daß letztere Voraussetzung genügt, *folgt aus Satz 4.*

Um zu einer Übertragung auf den R_3 zu kommen, stellen wir uns die Frage, welcher Teil des von den erzeugenden Gitterpunkten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ aufgespannten Parallelepipedes H für solche Scharen im R_3 ganz im Innern von B liegen müßte. Wir suchen also nach einer Eigenschaft im R_3, die geeignet ist, an Stelle von Satz 4 zu treten.

Wir führen wieder für alle Parallelepipede, die den Mittelpunkt im Ursprung $\mathfrak{o}$ haben, die folgende Bezeichnungsweise ein: H hat die Eckpunkte $\mathfrak{p} + \mathfrak{q} + \mathfrak{r}$, $-\mathfrak{p} + \mathfrak{q} + \mathfrak{r}$, $-\mathfrak{p} + \mathfrak{r} - \mathfrak{q}$, $\mathfrak{p} - \mathfrak{q} + \mathfrak{r}$, $\mathfrak{p} + \mathfrak{q} - \mathfrak{r}$, $-\mathfrak{p} + \mathfrak{q} - \mathfrak{r}$, $-\mathfrak{p} - \mathfrak{q} - \mathfrak{r}$, $\mathfrak{p} - \mathfrak{q} - \mathfrak{r}$. P_1 ist das Parallelepiped mit den Eckpunkten $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} + \mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}$; $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r} + \mathfrak{p}$, $\mathfrak{r} + \mathfrak{p} + \mathfrak{q}$, $\mathfrak{r} + \mathfrak{q}$. P_2 ist das Parallelepiped mit den Eckpunkten $\mathfrak{o}$, $-\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q} - \mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$; $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r} - \mathfrak{p}$, $\mathfrak{r} - \mathfrak{p} + \mathfrak{q}$, $\mathfrak{r} + \mathfrak{q}$. P_2 geht also aus P_1 durch Verschiebung um $-\mathfrak{p}$ hervor: $P_2 = P_1 - \mathfrak{p}$. Analog bezeichnen wir die anderen Teilepipede von H mit $P_3 = P_1 - \mathfrak{p} - \mathfrak{q}$, $P_4 = P_1 - \mathfrak{q}$ und wir nennen die zu diesen zentrisch symmetrisch gelegenen $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_4$. Dann ist

$$H = \sum_{i=1}^{4} (P_i + \overline{P}_i).$$

Der Satz von *Cassels* ließe sich verhältnismäßig leicht auf den R_3 übertragen, wenn als Verallgemeinerung von Satz 4 folgendes gelten würde: Hat ein Gitter Λ drei linear unabhängige Gitterpunkte $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$, in P_k (k beliebig 1, 2, 3 oder 4; wenigstens einer der drei Gitterpunkte liege im Innern von P_k), dann hat Λ auch mindestens einen Gitterpunkt ($\neq \mathfrak{o}$) in *jedem* der anderen Parallelepipede P_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Ein Gegenbeispiel zeige, daß diese Aussage *nicht* gilt: H sei der Einheitswürfel. Λ werde aufgespannt durch

$$\mathfrak{g}_1 = (1-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}, 1-\frac{\varepsilon}{2}),\ \mathfrak{g}_2 = (5\varepsilon, 1-2\varepsilon, \frac{\varepsilon}{4}),\ \mathfrak{g}_3 = (\varepsilon, \frac{1+\varepsilon}{2}, \frac{1+\varepsilon}{2}),$$

wo $0 < \varepsilon \leqq \frac{1}{1000}$ sei. Es ist $d(\Lambda) < 1$. Man überzeugt sich leicht, daß $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$ drei linear unabhängige Gitterpunkte in P_1 sind und daß in P_2 kein Gitterpunkt liegt.

Die Verallgemeinerung des Satzes von *Cassels*, bei der ein Parallelepiped P_k für eine Schar von Gittern ganz im Innern von B liegen würde, ist also nicht möglich. (Diese Verallgemeinerung wäre deshalb die naheliegendste, weil hier nur 7 Gitterpunkte auf dem Rand des Sternbereiches variiert hätten. Das hätte (vgl. die ersten 3 §§) $12 = 3\,(7-3)$ Nebenbedingungen für $14 = 2.7$ Parameter bedeutet. Es wäre also i. a. eine solche Schar zweiparametrig gewesen, was den Verhältnissen im R_2 analog ist).

Die folgende Verallgemeinerung des Satzes 4 ist für eine Übertragung des Satzes von *Cassels* ungeeignet, weil zuviele Gitterpunkte der Gitter der Scharen auf dem Rand des Sternbereiches liegen müßten (nämlich 11, was $3 \cdot (11-3)$ Nebenbedingungen für nur 2.11 Parameter ergibt) und daher geeignete Scharen im Sinne des Satzes von *Cassels* nicht existieren, sondern höchstens einzelne Gitter die Nebenbedingungen erfüllen. Sie soll erwähnt werden um zu zeigen, was im R_3 an Stelle des Satzes 4 tritt. Vom Beweis kann hier abgesehen werden, da er ganz analog zum Beweis von Satz 4 erbracht werden kann.

Satz 5: *Hat ein Gitter Λ 3 linear unabhängige Gitterpunkte $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$ in $P_i + P_k$ (i und k sind Zahlen 1, 2, 3 oder 4), wobei mindestens einer davon im Innern von $P_i + P_k$ liege, dann hat Λ auch mindestens einen Gitterpunkt in $P_j + P_1$ (j und l sind Zahlen 1, 2, 3 oder 4, wobei $j \neq i, k$ und $l \neq i, k$ ist).*

Es ergibt sich also eine Schwierigkeit bei der Verallgemeinerung des Satzes von *Cassels* auf den R_3 in der Wahl desjenigen Teiles von H, der für alle Schargitter ganz im Innern von B liegen soll. Während im R_2 (zugleich mit der Gültigkeit von Satz 4) eines der Parallelogramme P oder R gewählt werden kann, kann man im R_3 nicht eines der 8 Parallelepipede von H wählen, wie durch das Gegenbeispiel gezeigt wurde. Wählt man 2 Parallelepipede, so ist zwar durch Satz 5 die Voraussetzung für eine Verallgemeinerung des Satzes von *Cassels* gegeben, sie ist aber ohne Bedeutung, da den Gittern der Schar zu viele Nebenbedingungen

auferlegt werden müssen und es daher in den Anwendungen i. a. keine solchen Scharen geben wird. Das Verhalten anderer Teilbereiche von H wurde noch nicht untersucht.

Literatur.

[1] *J. W. S. Cassels* (Cambridge): A Theorem on star Domains. Quarterly Journal of Math. Volume **18**, 236—243, (1947).

[2] *K. Mahler*: Lattice points in two-dimensional Star Domains. Proc. London Math. Soc. (2). **49**, 128—157 (1946).

Die charakteristische Funktion von Hilbert für Potenzen von Hauptklassenidealen.*

Von

P. Anton Plattner O. F. M., Innsbruck.

(Eingelangt am 21. Januar 1954.)

Einleitung und Zusammenfassung.

Die charakteristische Funktion eines homogenen Polynomideals (*H*-Ideals) ist von *D. Hilbert* in einer grundlegenden Arbeit [1] in allgemeinster Form definiert und in ihren wichtigsten Eigenschaften bestimmt worden. Schon *Hilbert* machte in dieser Arbeit darauf aufmerksam, daß die charakteristische Funktion eine Verallgemeinerung der von *A. Cayley*, *G. Salmon*, *S. Roberts* und *A. Brill* eingeführten Postulationsformel ist, und daß die Koeffizienten der charakteristischen Funktion in engem Zusammenhang mit den von *M. Noether* definierten und behandelten Geschlechtszahlen der zugehörigen algebraischen Mannigfaltigkeiten stehen.

Im Jahre 1909 hat *Severi* [2] mit Hilfe der Postulationsformel die „virtuellen arithmetischen Geschlechter" einer algebraischen Mannigfaltigkeit definiert und viel Mühe darauf verwendet, die Invarianz dieser Zahlen gegenüber birationalen Transformationen wenigstens bei niederen Dimensionen zu zeigen, was u. a. auch von *H. T. Muhly* und *O. Zariski* [3] mit einem gewissen Erfolg durchgeführt worden ist. Wenn auch diese Bemühungen noch zu keinem abschließenden Ergebnis geführt haben, so haben sie doch außer Zweifel gerückt, daß der Grundgedanke richtig ist und daß in der Hilbertfunktion implizit eine Reihe von birationalen Invarianten enthalten sind, deren reine Darstellung noch nicht völlig gelungen sein dürfte.

---

* Auszug aus einer am Mathematischen Seminar der Universität Innsbruck ausgearbeiteten Dissertation.

Vielleicht kann es bei diesen Untersuchungen nützen, die etwas schwerfälligen geometrischen Begriffe der klassischen algebraischen Geometrie beiseitezustellen und diese Frage mit derselben Methode weiter zu behandeln, die *Hilbert* bereits in der oben zitierten Arbeit mit so durchschlagendem Erfolg benützt hat. Die inzwischen hochentwickelte Idealtheorie vermag in vielen Fällen weitreichende Hilfsmittel bereitzustellen. In diesem Sinne habe ich in zwei neueren Arbeiten [5], [6] versucht, unter allgemeinsten Gesichtspunkten zu erforschen, in welcher Weise die Hilbertfunktion $H(t; \mathfrak{a}_x)$ und $H(t; \mathfrak{a}_y)$ zweier H-Ideale $\mathfrak{a}_x$ und $\mathfrak{a}_y$ zusammenhängen, von denen das eine durch eine rationale Transformation $(y_j = \varphi_j(x))$ aus dem anderen hervorgeht. Dieser Zusammenhang läßt sich in der folgenden einfachen Formel darstellen:

$$H(t; \mathfrak{a}_y) = H(t; \mathfrak{a}_x) - H(\mu t; \mathfrak{a}_x + \mathfrak{u}'),$$

wo $\mathfrak{u} = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ und μ der gemeinsame Grad aller Formen φ_j ist.

Es ist hier interessant zu bemerken, daß *Northcott* [7] vor kurzem in dem Bestreben, eine verallgemeinerte Hilbertfunktion für Ideale in Stellenringen zu erklären, eine in wesentlichen Punkten übereinstimmende Formel aufgestellt hat; demnach könnte man die Hilbertfunktion $H(t; \mathfrak{a}_y)$ des transformierten Ideals auch als „verallgemeinerte Hilbertfunktion" des ursprünglichen Ideals $\mathfrak{a}_x$ deuten.

Jedenfalls aber geht aus dieser Formel die Bedeutung des in der nachfolgenden Arbeit behandelten Problems hervor, die explizite Berechnung der Hilbertfunktion $H(t; \mathfrak{a}^\varrho)$ für die Potenzen eines H-Ideals $\mathfrak{a}$ durchzuführen. Es ist dies als erster Schritt zu werten, das in der obigen Formel auftretende Glied $H(\mu t; \mathfrak{a}_x + \mathfrak{u}')$ näher zu bestimmen.

Es ist naheliegend, diese Untersuchung zunächst auf Hauptklassenideale

$$\mathfrak{a} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r)$$

zu beschränken, deren Basisformen alle denselben Grad τ haben. Für diese Ideale ist es gelungen, mehrere geschlossene Formeln abzuleiten, mit denen man die Hilbertfunktion $H(t; \mathfrak{a}^\varrho)$ berechnen kann [Formel (3), (5), (7)]. Ferner konnte bewiesen werden, daß die Koeffizienten der Hilbertfunktion $H(t; \mathfrak{a}^\varrho)$ selbst Polynome in ϱ sind, deren Grad genau angegeben werden kann [Satz (19)].

W. Gröbner.

Es liegt ein homogener Polynomring $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ über einen beliebigen Körper K zugrunde. Es wird ein Hauptklassenideal

$$\mathfrak{a} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r)$$

betrachtet, dessen Basisformen φ_i alle denselben Grad haben. Folgende Bezeichnungen werden hier festgehalten:

$n+1$ Anzahl der Variablen des homogenen Polynomringes;

d Dimension des Ideals;

r Rang des Ideals;

ϱ Potenz, zu welcher das Ideal genommen wird. Dabei gilt allgemein $a^0 = (1)$;

t Grad der Formen des Ideals, deren Anzahl untersucht wird;

φ Basisformen des Ideals;

τ Grad der Basisformen φ;

$$\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = \begin{cases} \binom{m}{n} & \text{für } m \geqq 0, \\ 0 & \text{für } m < 0. \end{cases}$$

I. Eine Rekursionsformel.

Hilfssatz: Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Ideale eines kommutativen Ringes und φ ein Element desselben, das kein Nullteiler ist, so gilt:

$$[\mathfrak{a}, \varphi\,\mathfrak{b}] = \varphi\,[\mathfrak{a} : \varphi, \mathfrak{b}]. \tag{1}$$

Setzt man nämlich $[\mathfrak{a}, \varphi\,\mathfrak{b}] = \varphi\,\mathfrak{c}$, so ist $\mathfrak{c} \subseteq [\mathfrak{a}, \varphi\,\mathfrak{b}] : \varphi = [\mathfrak{a} : \varphi, \mathfrak{b}]$. Andererseits ist $\varphi\,[\mathfrak{a} : \varphi, \mathfrak{b}] \subseteq [\mathfrak{a}, \varphi\,\mathfrak{b}]$, also

$$[\mathfrak{a}, \varphi\,\mathfrak{b}] = \varphi\,\mathfrak{c} \subseteq \varphi\,[\mathfrak{a} : \varphi, \mathfrak{b}] \subseteq [\mathfrak{a}, \varphi\,\mathfrak{b}],$$

woraus die Behauptung folgt.

Wir betrachten ein Ideal $\mathfrak{a}$ der Hauptklasse r[1] und fügen eine zu $\mathfrak{a}$ relativ prime Form $\varphi = \varphi_{r+1}$ hinzu, so daß das neue Ideal $(\mathfrak{a}, \varphi)$ wieder ein Hauptklassenideal ist. Für die ϱ^{te}-Potenz dieses Ideals hat man

$$(\mathfrak{a}, \varphi)^\varrho = \mathfrak{a}^\varrho + \varphi\,(\mathfrak{a}, \varphi)^{\varrho-1}.$$

Die Hilbertfunktion der Summe dieser zwei Ideale ist[2]:

$$H(t; (\mathfrak{a}, \varphi)^\varrho) = H(t; \mathfrak{a}^\varrho) + H(t; \varphi\,(\mathfrak{a}, \varphi)^{\varrho-1}) - H(t; [\mathfrak{a}^\varrho, \varphi\,(\mathfrak{a}, \varphi)^{\varrho-1}]).$$

---

[1] Das ist ein Ideal des Ranges r oder der Dimension $d = n - r$, das eine r-gliedrige Basis besitzt ([4], S. 122).

[2] Vgl. [4], S. 158.

Es ist zu bemerken, daß jede Potenz eines P-Ideals der Hauptklasse ungemischt ist[3], d. h. aus $\mathfrak{a} : \varphi = \mathfrak{a}$ folgt $\mathfrak{a}^\varrho : \varphi = \mathfrak{a}^\varrho$ für $\varrho = 1, 2, \ldots$. Unter diesen Voraussetzungen folgt mit Verwendung des Hilfssatzes (1):

$$[\mathfrak{a}^\varrho, \varphi\,(\mathfrak{a}, \varphi)^{\varrho-1}] = \varphi\,[\mathfrak{a}^\varrho : \varphi, (\mathfrak{a}, \varphi)^{\varrho-1}] = \varphi\,[\mathfrak{a}^\varrho, (\mathfrak{a}, \varphi)^{\varrho-1}]$$

und wegen $\mathfrak{a}^\varrho \subset (\mathfrak{a}, \varphi)^{\varrho-1}$ erhält man

$$[\mathfrak{a}^\varrho, \varphi\,(\mathfrak{a}, \varphi)^{\varrho-1}] = \varphi\,\mathfrak{a}^\varrho.$$

Man kann überlegen, daß allgemein gilt:

$$H\,(t; \varphi\,\mathfrak{c}) = H\,(t; (\varphi)) + H\,(t - \tau; \mathfrak{c}).$$

Aus diesen Erwägungen ergibt sich eine wertvolle Rekursionsformel für die Hilbertfunktion:

$$H\,(t; (\mathfrak{a}, \varphi)^\varrho) = H\,(t; \mathfrak{a}^\varrho) - H\,(t - \tau; \mathfrak{a}^\varrho) + H\,(t - \tau;\ (\mathfrak{a}, \varphi)^{\varrho-1}). \tag{2}$$

Für $\varrho = 1$ reduziert sich diese Formel auf die bekannte:

$$H\,(t; (\mathfrak{a}, \varphi)) = H\,(t; \mathfrak{a}) - H\,(t - \tau; \mathfrak{a})^4,$$

da $(\mathfrak{a}, \varphi)^0$ das Einheitsideal und daher $H\,(t - \tau; (\mathfrak{a}, \varphi)^0) = 0$ ist.

Ferner hat die Hilbertfunktion $H\,(t; \mathfrak{a})$ eines beliebigen Ideals $\mathfrak{a}$ den Wert null, wenn t eine negative ganze Zahl ist. Wenn man dies festhält und die Voraussetzung $\mathfrak{a} : \varphi = \mathfrak{a}$ erfüllt ist, so gilt die Formel (2) ganz allgemein für $t = 0, 1, 2, \ldots$ und für $\varrho = 1, 2, \ldots$. Es ist nicht gefordert, daß die Basisformen alle denselben Grad haben, ja $\mathfrak{a}$ selbst braucht kein Hauptklassenideal zu sein.

II. Einige Formeln für die Hilbertfunktionen für Potenzen von Hauptklassenidealen mit gleichgradigen Basisformen.

Zuerst soll die Hilbertfunktion für die erste Potenz von Hauptklassenidealen behandelt werden. Es wird zunächst die Formel angegeben, welche hierauf mittels Induktionsschluß bewiesen wird.

$$H\,(t; (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r)) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \left\{\!\binom{t-j}{n}^{r+n}\!\right\}. \tag{3}$$

Beweis: Durch Einsetzen bekommt man für $r = 1$ das richtige Ergebnis:

$$H\,(t; (\varphi)) = \binom{t+n}{n} - \left\{\!\binom{t-\tau+n}{n}\!\right\}^5.$$

---

[3] Vgl. [4], S. 129.
[4] Vgl. [4], S. 158 (9e).
[5] Vgl. [4], S. 162.

Nun wird vorausgesetzt, daß die Formel für Ideale der Klasse r bereits gilt und es wird gezeigt, daß sie auch für $r+1$ richtig ist, solange $r+1 \leqq n+1$ ist. Auf Grund der Rekursionsformel (2), für $\varrho = 1$, folgt für ein Hauptklassenideal $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{r+1})$, dessen Basisformen alle denselben Grad τ haben:

$$H(t; (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{r+1})) = H(t; (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r) - H(t-\tau; (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r)).$$

Benützt man die Induktionsvoraussetzung, so können diese zwei Hilbertfunktionen durch die folgenden Summen dargestellt werden:

$$\sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \left\{ \begin{matrix} t-j\tau+n \\ n \end{matrix} \right\} - \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \left\{ \begin{matrix} t-(j+1)\tau+n \\ n \end{matrix} \right\}.$$

Faßt man diese zwei Summen zusammen, so folgt:

$$H(t; (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{r+1})) = \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^j \binom{r+1}{j} \left\{ \begin{matrix} t-j\tau+n \\ n \end{matrix} \right\},$$

was zu beweisen war.

Kennt man die Hilbertfunktion für die Potenzen des Ideals $\mathfrak{a}$, und ist $\mathfrak{a} : \varphi = \mathfrak{a}$, so kann man durch ϱ-malige Anwendung der Rekursionsformel (2) auch die Hilbertfunktion für $(\mathfrak{a}, \varphi)^\varrho$ berechnen:

$$H(t; (\mathfrak{a}, \varphi)^\varrho) = \sum_{j=0}^{\varrho-1} [H(t-j\tau; \mathfrak{a}^{\varrho-j}) - H(t-(j+1)\tau; \mathfrak{a}^{\varrho-1})]. \qquad (4)$$

Auch hier ist wieder zu beachten, daß die Hilbertfunktion für ein negatives Argument t gleich null zu setzen ist. Im übrigen gilt diese Formel ganz allgemein für $\varrho = 1, 2, \ldots$

Die folgende Formel beweisen wir durch vollständige Induktion bezüglich r und ϱ.

$$H(t; \mathfrak{a}^\varrho) = \binom{t+n}{n} - \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \binom{\varrho+j-1}{j} \binom{\varrho+r-1}{r-1-j} \left\{ \begin{matrix} t-\varrho\tau-j\tau+n \\ n \end{matrix} \right\} \text{ für } \varrho = 1, 2, \ldots \qquad (5)$$

Beweis: Durch Einsetzen sieht man, daß die Formel für $r = 1$ richtig ist.

$$H(t; (\varphi)^\varrho) = \binom{t+n}{n} - \left\{ \begin{matrix} t-\varrho\tau+n \\ n \end{matrix} \right\}$$

Ferner gilt (5) für $\varrho = 1$ und alle $r = 1, 2, \ldots, n+1$, weil sie dann mit (3) übereinstimmt.

Nun setzen wir voraus, daß die Formel (5) bereits für alle Potenzen des Ideals $\mathfrak{a}$, sowie für die Exponenten $1, 2, \ldots, \varrho-1$ des Ideals $(\mathfrak{a}, \varphi)$ bewiesen sei. Dann folgt aus (2) mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung:

$$H(t;(\mathfrak{a},\varphi)^{\varrho}) = \binom{t+n}{n} - \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \binom{\varrho+j-1}{j} \binom{\varrho+r-1}{r-1-j} \left\{ {t-\varrho\,\tau-j\,\tau+n \atop n} \right\}$$
$$+ \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \binom{\varrho+j-1}{j} \binom{\varrho+r-1}{r-1-j} \left\{ {t-(\varrho+1)\,\tau-j\,\tau+n \atop n} \right\}$$
$$- \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{\varrho+j-2}{j} \binom{\varrho+r-1}{r-j} \left\{ {t-\varrho\,\tau-j\,\tau+n \atop n} \right\}.$$

Das erste Glied der ersten und dritten Summe und das letzte der zweiten und dritten Summe werden aus der Summenformel herausgenommen und für sich behandelt. Sie ergeben zusammengefaßt die beiden Glieder:

$$\binom{\varrho+r}{r} \left\{ {t-\varrho\,\tau+n \atop n} \right\}, \qquad (-1)^{r+1} \binom{\varrho+r-1}{r} \left\{ {t-(\varrho+r)\,\tau+n \atop n} \right\}.$$

Nach entsprechender Veränderung der Summationsbuchstaben bleiben dann noch die drei folgenden Summen:

$$\sum_{j=0}^{r-2} (-1)^j \binom{\varrho+j}{j+1} \binom{\varrho+r-1}{r-2-j} \left\{ {t-(\varrho+1)\,\tau-j\,\tau+n \atop n} \right\}$$
$$\sum_{j=0}^{r-2} (-1)^j \binom{\varrho+j-1}{j} \binom{\varrho+r-1}{r-1-j} \left\{ {t-(\varrho+1)\,\tau-j\,\tau+n \atop n} \right\}$$
$$\sum_{j=0}^{r-2} (-1)^j \binom{\varrho+j-1}{j+1} \binom{\varrho+r-1}{r-1-j} \left\{ {t-(\varrho+1)\,\tau-j\,\tau+n \atop n} \right\},$$

welche zusammengefaßt ergeben:

$$\sum_{j=0}^{r-2} (-1)^j \binom{\varrho+j}{j+1} \binom{\varrho+r}{r-1-j} \left\{ {t-(\varrho+1)\,\tau-j\,\tau+n \atop n} \right\}.$$

Die zwei Glieder, welche eigens berechnet wurden, werden wieder in die Summe hineingenommen, so daß wir schließlich haben:

$$H(t;(\mathfrak{a},\varphi)^{\varrho}) = \binom{t+n}{n} - \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{\varrho+j-1}{j} \binom{\varrho+r}{r-j} \left\{ {t-\varrho\,\tau-j\,\tau+n \atop n} \right\};$$

damit ist Formel (5) allgemein bewiesen.

Wichtig ist der Spezialfall $t = \varrho\tau$. Nach Einsetzen in (5) bleibt von der Summe nur das Glied $j = 0$ stehen.

$$H(\varrho\tau;\mathfrak{a}^{\varrho}) = \binom{\varrho\,\tau+n}{n} - \binom{\varrho+r-1}{r-1}, \text{ für } \varrho = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Eine weitere Formel für die Hilbertfunktion von Potenzen von Hauptklassenidealen mit gleichgradigen Basisformen lautet:

$$H(t;\mathfrak{a}^{\varrho}) = \sum_{j=0}^{\varrho-1} \binom{r+j-1}{j} H(t-j\tau;\mathfrak{a}) \tag{7}$$

Beweis: Zunächst wird die Richtigkeit der Formel

$$H(t;\mathfrak{a}^{\varrho}) = H(t;\mathfrak{a}^{\varrho-1}) + \binom{\varrho+r-2}{\varrho-1} H(t-(\varrho-1)\tau;\mathfrak{a}) \qquad (7a)$$

durch Verwendung von (5) gezeigt. Durch Veränderung des Summationsindex bekommt man:

$$H(t;\mathfrak{a}^{\varrho}) = \binom{t+n}{n} + \sum_{j=1}^{r} (-1)^j \binom{\varrho+j-2}{j-1} \binom{\varrho+r-1}{r-j} \left\{ \begin{matrix} t-(\varrho+j-1)\tau+n \\ n \end{matrix} \right\}.$$

Die Summe zerlegen wir in zwei dadurch, daß wir folgende Beziehung verwenden:

$$\binom{\varrho+j-2}{j-1} \binom{\varrho+r-1}{r-j} = \binom{r}{j} \binom{\varrho+r-2}{r-1} - \binom{\varrho+j-2}{j} \binom{\varrho+r-2}{r-1-j},$$

deren Richtigkeit man durch einfaches Berechnen der rechten Seite bestätigen kann. Dies führt nach einer leichten Zwischenrechnung auf

$$H(t;\mathfrak{a}^{\varrho}) = \binom{t+n}{n} - \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \binom{\varrho+j-2}{j} \binom{\varrho+r-2}{r-1-j} \left\{ \begin{matrix} t-(\varrho-1+j)\tau+n \\ n \end{matrix} \right\} +$$

$$+ \binom{\varrho+r-2}{r-1} \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \left\{ \begin{matrix} t-(\varrho-1+j)\tau+n \\ n \end{matrix} \right\},$$

woraus wegen (5) und (3) die zu beweisende Formel (7a) folgt. Wendet man (7a) ϱ-mal rekursiv an, so erhält man (7).

III. Die Hilbertschen Koeffizienten für Potenzen von Hauptklassenidealen.

Die Hilbertfunktion $H(t;\mathfrak{a}^{\varrho})$ ist für genügend große Werte von t ein Polynom in t, dessen Grad gleich der Dimension d des Ideals $\mathfrak{a}$ ist. Während die vorausgehenden Formeln für alle Werte von t gültig waren, ist das bei den folgenden Formeln immer erst von einer unteren Schranke an richtig. Für gewöhnlich schreibt man die Hilbertfunktion in der folgenden Gestalt:

$$H(t;\mathfrak{a}^{\varrho}) = \sum_{i=0}^{d} h_i \binom{t}{d-i},^{6} \qquad t \geqq T. \qquad (8)$$

Im allgemeinen steht fest, daß die Hilbertschen Koeffizienten $h_0, h_1, \ldots, h_d$ ganze rationale Zahlen sind. Hier werden sie Funktionen von ϱ sein.

Für manche Zwecke ist folgende Schreibweise besser:

$$H(t;\mathfrak{a}^{\varrho}) = \sum_{i=0}^{d} k_i \binom{t+d-i}{d-i}, \qquad t \geqq T. \qquad (9)$$

Jede dieser beiden Darstellungen läßt sich in einfacher Weise in die andere überführen.

---

[6] Vgl. [4], S. 161, (15a).

Für die weiteren Ausführungen brauchen wir die folgenden drei Hilfsformeln (10), (11) und (12), bei denen n eine natürliche Zahl, a und b beliebige reelle Zahlen bedeuten:

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{b}{j}\binom{a}{n-j},^{7} \tag{10}$$

$$\binom{a-b}{n} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{b}{j}\binom{a-j}{n-j}, \tag{11}$$

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j}\binom{a+j}{\alpha}^{b} = \begin{cases} 0 \text{ für } \alpha = 0, 1, \ldots, n-1, \\ (-1)^n b^n \quad \text{für } \alpha = n, \\ \text{ein Polynom in } a \text{ vom} \\ \text{Grad } \alpha - n \text{ für } \alpha > n. \end{cases} \tag{12}$$

Die Richtigkeit der Formel (11) kann man mit Hilfe von (10) zeigen; es gilt nämlich:

$$\binom{a-b}{n} = (-1)^n \binom{-a+b+n-1}{n} = (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \binom{b}{j}\binom{-a+n-1}{n-j} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{b}{j}\binom{a-j}{n-j}.$$

Beweis von (12): Bildet man die α^{te} Ableitung von $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu$ und multipliziert mit $(1-x)^n$, so erhält man:

$$(1-x)^{n-\alpha-1} = (1-x)^n \sum_{\nu=-\alpha}^{\infty} \binom{\alpha+\nu}{\alpha} x^\nu.$$

Aus dem Koeffizientenvergleich geht hervor, daß rechts alle Koeffizienten derjenigen Potenzen von x verschwinden, welche größer als $n-\alpha-1 \geqq 0$ sind. Ist aber $n = \alpha$, so sind die Koeffizienten aller Potenzen von x gleich eins. Daher findet man nach kurzer Zwischenrechnung:

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j}\binom{a+j}{a} = \begin{cases} 0 \quad \text{für} \quad \alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \\ (-1)^n \binom{a}{\alpha-n} \text{ für } \alpha = n, n+1, \ldots, \end{cases} \tag{13}$$

wo a zunächst alle Zahlen 0, 1, 2, ... bedeuten darf. Da aber links der Ausdruck ein Polynom vom Grade α in a darstellt, das für unendlich viele Werte von a mit der rechten Seite, die null oder wieder ein Polynom in a ist, übereinstimmt, so gelten diese Beziehungen identisch in a, d. h. für beliebige (reelle oder komplexe) Zahlen a. Im folgenden werden diese Formeln jedoch nur für ganze rationale Zahlen verwendet.

Rechnet man von den Binomialkoeffizienten auf Potenzen um, so folgt:

---

[7] Vgl. [4], S. 162.

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (a+j)^\alpha = \begin{cases} 0 \quad \text{für} \quad \alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \\ (-1)^n n! \quad \text{für} \quad \alpha = n, \\ \text{ein Polynom in } a \text{ vom Grade } \alpha - n \\ \text{für} \quad \alpha > n. \end{cases} \tag{14}$$

Aus (13) und (14) geht (12) hervor.

Die Formel (11) gilt aber nicht mehr für das Symbol $\left\{\begin{smallmatrix} a-b \\ n \end{smallmatrix}\right\}$, und daher haben die folgenden Entwicklungen nur für die Werte von t Geltung, die groß genug sind, so daß die Symbole $\left\{\begin{smallmatrix} t-j\,\tau-\nu\,\tau+n \\ n \end{smallmatrix}\right\}$ mit den gewöhnlichen Binomialsymbolen übereinstimmen. Infolgedessen muß immer vorausgesetzt werden:

$$t \geqq (\varrho + \nu - 1)\,\tau - n.$$

Durch Einsetzen von (3) in (7) erhält man:

$$H(t; \mathfrak{a}^\varrho) = \sum_{j=0}^{\varrho-1} \binom{r+j-1}{j} \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r}{\nu} \binom{t-(j+\nu)\,\tau+n}{n}.$$

Mit Hilfe von (11) kann diese Gleichung so umgeformt werden:

$$H(t; \mathfrak{a}^\varrho) = \sum_{\mu=0}^{n} (-1)^\mu \binom{t+n-\mu}{n-\mu} \sum_{j=0}^{\varrho-1} \binom{r+j-1}{j} \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r}{\nu} \binom{(j+\nu)\,\tau}{\mu},$$

und wegen (12) verschwindet die letzte Summe für alle $\mu < r$. Setzen wir $i = \mu - r$ und $n - r = d$, so folgt:

$$H(t; \mathfrak{a}^\varrho) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^{i+r} \binom{t+d-i}{d-i} \sum_{j=0}^{\varrho-1} \binom{r+j-1}{j} \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r}{\nu} \binom{(j+\nu)\,\tau}{r+i}.$$

Aus dieser Formel kann man die k-Koeffizienten ablesen.

$$k_i = (-1)^{i+r} \sum_{j=0}^{\varrho-1} \binom{r+j-1}{j} \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r}{\nu} \binom{(j+\nu)\,\tau}{r+i}, \quad i = 0, 1, \ldots, d. \tag{15a}$$

Durch Verwendung von (11) in (5) und mit Rücksicht darauf, daß die k_i nach (15a) Polynome in τ vom Grade $r+i$ sind, erhält man für die k_i eine weitere Formel:

$$k_i = \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^{r+j+i+1} \binom{\varrho+j-1}{j} \binom{\varrho+r-1}{r-1-j} \binom{(\varrho+j)\,\tau}{r+i}. \tag{15b}$$

Die h-Koeffizienten berechnet man aus den k-Koeffizienten. Mit Hilfe von (10) findet man allgemein:

$$h_i = \sum_{\mu=0}^{i} \binom{d-\mu}{i-\mu} k_\mu. \tag{16}$$

Aus (16) und (15a) folgt somit:

$$h_i = \sum_{\mu=0}^{i} (-1)^{\mu+r} \binom{d-\mu}{i-\mu} \sum_{j=0}^{\varrho-1} \binom{r+j-1}{j} \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^{\nu} \binom{r}{\nu} \binom{(j+\nu)\tau}{r+\mu}. \tag{17a}$$

Verwendet man (10) in (5) und berücksichtigt, daß die h_i nach (17a) Polynome in τ vom Grade $r+i$ sind, so folgt:

$$h_i = \binom{n}{r+i} - \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \binom{\varrho+j-1}{j} \binom{\varrho+r-1}{r-j-1} \binom{n-\varrho\,\tau-j\,\tau}{r+i}, \quad i=0,1,\ldots,d. \tag{17b}$$

Die Berechnung der k-Koeffizienten ist einfacher als die der h-Koeffizienten, weil die k-Koeffizienten den Faktor n nicht enthalten, welcher die Anzahl der Variablen des zugrundeliegenden Körpers angibt, während ihn die h-Koeffizienten enthalten.

Der erste Hilbertsche Koeffizient $h_0 = k_0$ wird als die Ordnung des betreffenden Ideals bezeichnet[8]. Darüber können wir auf Grund (15a) und (12) eine allgemeine Aussage machen.

> Die Ordnung h_0 der ϱ^{ten} Potenz eines Hauptklassenideals vom Range r, dessen Basisformen alle den Grad τ haben, ist ein Polynom in ϱ und τ vom Grade r ,und zwar gleich: (18)
>
> $$k_0 = h_0 = \binom{\varrho+r-1}{r} \tau^r$$

Handelt es sich um ein Hauptklassenideal $\mathfrak{a}$ mit *nicht* gleichgradigen Basisformen, so lautet die Ordnung des Ideals $\mathfrak{a}^{\varrho}$:

$$k_0 = h_0 = \binom{\varrho+r-1}{r} \tau_1 \tau_2 \ldots \tau_r.$$

Abschließend werden noch einige allgemeine Aussagen über die Hilbertschen Koeffizienten gemacht. Diese gelten sowohl für die h_i als auch für die k_i. Sie ergeben sich aus (12), (15a) und (17a).

> I. Die Hilbertschen Koeffizienten für die Potenz ϱ von Hauptklassenidealen, deren Basisformen alle den Grad τ haben, sind Polynome in τ, deren Grad gleich ist dem Rang r des betreffenden Ideals, vermehrt um den Index des jeweiligen Koeffizienten. (19)
>
> II. Es verschwinden alle jene Potenzen von τ, welche kleiner als r sind.
>
> III. Die Koeffizienten dieser Polynome in τ sind Polynome in ϱ, deren Grad gleich ist der betreffenden Potenz von τ.

[8] Vgl. [4], S. 161, 15.

Literatur.

[1] *D. Hilbert*, Über die Theorie der algebraischen Formen. Math. Ann. **36** (1890), 473—534.

[2] *F. Severi*, Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche. Rend. Circolo mat. Palermo **28** (1909), 33—87. Seconda Memoria. Annali Mat. pura appl. (IV) **32** (1951), 1—81.

[3] *H. T. Muhly-O. Zariski*, Hilbert's characteristic function and the arithmetic genus of an algebraic variety. Trans. Amer. math. Soc. **69** (1950), 78—88.

[4] *W. Gröbner*, Moderne algebraische Geometrie, Springer-Verlag, Wien 1949.

[5] *W. Gröbner*, Über das arithmetische Geschlecht einer algebraischen Mannigfaltigkeit. Archiv d. Math. **3** (1952), 351—359.

[6] *W. Gröbner*, Über das Verhalten der Hilbertfunktion eines H-Ideals bei rationalen Transformationen. Archiv d. Math., Ostrowski-Widmungsband, im Erscheinen.

[7] *D. G. Northcott*, Hilbert's function in a local ring. Quart. J. Math. Oxford II. Ser. **4** (1953), 67—80.

Über ein Resultat von A. Walfisz.

Von

K. Prachar, Wien.

(Eingelangt am 22. Januar 1954.)

Von *Sierpinski* wurde gezeigt, daß es zu jeder noch so großen Zahl A immer Primzahlen p gibt, welche so beschaffen sind, daß die nächstkleinere und die nächstgrößere Primzahl zu p von p einen Abstand größer A haben.

Kürzlich bewies *A. Walfisz* (Doklady Akad. Nauk SSSR. **90**, 711 (1953)), daß sogar fast alle Primzahlen von ihrem linken und rechten Nachbar „stark isoliert" sind. Genauer zeigte er: Sei $r(x)$ die Anzahl derjenigen $p \leqq x$, für die alle q mit

$$|q - p| \leqq \frac{\log p}{(\log\log\log p)^2} \tag{1}$$

nicht prim sind. Dann ist $r(x) \sim \pi(x) \sim x/\log x$, wobei wie üblich $\pi(x)$ die Anzahl aller $p \leqq x$ bedeuten soll.

In dieser Note soll gezeigt werden, daß das Glied $(\log\log\log p)^2$ im Nenner von (1) durch jede beliebige Funktion ersetzt werden kann, die mit wachsenden p gegen Uenendlich strebt. Wir zeigen also:

Satz 1: Sei $s(x)$ die Anzahl aller Primzahlen $p \leqq x$ für die jedes q mit

$$|q - p| \leqq \frac{\log p}{f(p)} \tag{2}$$

nicht prim ist. Es sei $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ und der Einfachheit halber möge $\log x / f(x) \to \infty$ streben und etwa für $x > x_0$ monoton sein. Dann gilt

$$s(x) \sim \frac{x}{\log x} \tag{3}$$

Zum Beweise dieses Satzes benötigen wir, ebenso wie *Walfisz* loc. cit., den folgenden

Hilfssatz (Brun-Schnirelman): Sei $A(x, y)$ die Anzahl der $p \leqq x$ für die auch $p + y$ prim ist. Dann gilt

$$A(x, y) < c_1 \frac{x}{\log^2 x} \prod_{q/y} (1 + 1/p) \tag{4}$$

(mit c werden absolute Konstanten bezeichnet), für alle y mit $-x \leqq y \leqq x$.

Aus diesem Hilfssatz folgt: Die Anzahl $B(x, y)$ der Primzahlen $p \leqq x$, für die entweder $p + y$ oder $p - y$ prim ist, ist kleiner als

$$2 c_1 \frac{x}{\log^2 x} \prod_{p/y} (1 + 1/p) \tag{5}$$

Offenbar kann ohne Einschränkung $f(x) > 0$ angenommen werden. Weiter erhalten wir

$$\sum_{0<y\leqq \log x/f(x)} B(x, y) < 2 c_1 \frac{x}{\log^2 x} \sum_{0<y\leqq \log x/f(x)} \prod (1 + 1/p) \leqq$$

$$\leqq 2 c_1 \frac{x}{\log^2 x} \sum_{0<y\leqq \log x/f(x)} \sum_{d/y} 1/d$$

$$\leqq 2 c_1 \frac{x}{\log^2 x} \sum_{0<d\leqq \log x/f(x)} \frac{1}{d} \frac{\log x / f(x)}{d} \leqq$$

$$\leqq c_2 \frac{x}{f(x) \log x} = o\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

Nach Ausscheiden der $p \leqq x$, für die irgend ein $p \pm y$, $0 < y \leqq \log x/f(x)$, prim ist, bleiben also noch $\pi(x) - o\left(\frac{x}{\log x}\right) \sim \frac{x}{\log x}$ Primzahlen $\leqq x$ über, für die q nicht prim ist, wenn

$$|q - p| < \frac{\log x}{f(x)} \tag{2'}$$

Die q, die (2') erfüllen, erfüllen auch (2) für genügend großes p, da die Monotonie von $\log x/f(x)$ vorausgesetzt wurde. Damit ist Satz 1 bewiesen. Ähnlich kann man beweisen

Satz 2: Bei passendem $\delta > 0$ ist die Anzahl der $p \leqq x$ mit:

$$q \text{ nicht prim für } |q - p| < \delta \log x \tag{6}$$

größer als $c_3 \frac{x}{\log x}$, wobei c_3 von δ abhängt.

Beweis: Wie beim Beweise von Satz 1 zeigt man

$$\sum_{0<y<\delta \log x} B(x, y) \leqq c_4 \delta \frac{x}{\log x}. \tag{7}$$

Wenn $\delta c_4 < 1$ gewählt wird, so bleiben noch mindestens

$$\pi(x) - c_4 \delta \frac{x}{\log x} \sim (1 - c_4 \delta) \frac{x}{\log x}$$

Primzahlen $p \leqq x$ über, für die (6) gilt, w.z.z.w.

Bemerkung zu einer Arbeit von Erdös und Renyi und Berichtigung.

Von

K. Prachar, Wien.

(Eingelangt am 22. Januar 1954.)

In der Arbeit „Some Problems and Results on Consecutive Primes, Simon Stevon Wis en Natuurkundig Tijdschrift, 27, (1949/50), S. 115" beweisen *P. Erdös* und *A. Renyi* verschiedene interessante Resultate über die Differenzen $d_n = p_n - p_{n-1}$ aufeinanderfolgender Primzahlen. Eines dieser Resultate wurde von mir in gewisser Weise verallgemeinert (Über Primzahldifferenzen II, Monatshefte für Math. 56 (1952) 307). Haupthilfsmittel bei den Beweisen von *Erdös* und *Renyi* ist folgendes *Lemma* (Lemma 1 a. a. O.): Die Anzahl der Lösungen von $d_n = a$, $d_{n+1} = b$, $p_n \leqq N$ ist kleiner als

$$c_9 \frac{N}{\log^3 N} \prod_{p|a} (1 + 1/p) \prod_{p|a+b} (1+1/p) \tag{1}$$

Dieses Lemma wurde von *Erdös-Renyi* ohne Beweis angegeben. Für die von mir behandelte Verallgemeinerung war auch eine Verallgemeinerung des obigen Lemmas notwendig.

Leider bemerke ich erst jetzt, daß sowohl das Lemma von *Erdös-Renyi*, als auch die von mir gegebene Verallgemeinerung in dieser Form nicht bewiesen werden können. In (1) muß noch ein Faktor der Form

$$\prod_{p|b,\, p \nmid a} (1 + 1/p)$$

hinzutreten und bei der von mir angegebenen Verallgemeinerung ist ebenfalls ein zusätzlicher (etwas komplizierterer) Faktor nötig.

Durch diese Modifikationen wird die Richtigkeit der Resultate nicht berührt, obwohl die Beweise dadurch komplizierter werden.

Die Konvergenzradien einiger zur Lösung transzendenter Gleichungen verwendeter Potenzreihen.

Von

Gustav Lochs, Innsbruck.

(Eingelangt am 26. Januar 1954.)

Zur Berechnung der positiven Wurzeln der Gleichungen

$$\operatorname{tg} z = z, \quad \operatorname{tg} z = 2z \tag{1}$$

$$\operatorname{Cos} z \cos z = 1 \tag{2}$$

$$\operatorname{Cos} z \cos z = -1 \tag{3}$$

haben unter andern *Euler* und Lord *Rayleigh* Potenzreihen nach einer Veränderlichen t aufgestellt, die für bestimmte Werte von t, falls sie konvergieren, die Wurzeln ergeben. Im Falle der Gleichung (3) erhält man die Wurzeln z_k aus

$$z_k = \frac{2k-1}{2}\pi - u_k \qquad (k \geqq 1, \text{ ganz}) \tag{4}$$

wo u_k wie folgt gewonnen wird. Man entwickelt die Funktion

$$t(u) = e^u \operatorname{tg} u/2 \tag{5}$$

in eine Potenzreihe nach u und bildet die inverse Potenzreihe nach t. Für

$$t_k = (-1)^k e^{-\frac{2k-1}{2}\pi} \tag{6}$$

hat sie den Wert u_k, falls sie konvergiert.

Bei den Gleichungen (1) heißt die (5) entsprechende Funktion $(u + \operatorname{ctg} u)^{-1}$ bzw. $(2u + \operatorname{ctg} u)^{-1}$, bei (2) ergibt sich auch die Funktion (5), aber andere Werte für t_k. Kürzlich hat Herr *Haakon Waadeland* [1] die Konvergenzradien der Reihen abgeschätzt und gefunden, daß die Reihen sicher für alle in Frage kommenden Werte von t konvergieren, abgesehen vom Fall t_1 der Gleichung (3), in dem die Frage der Konvergenz weiter offen blieb. Im folgenden soll durch Betrachtung der Abbildungseigenschaften von (5) der Konvergenzradius der fraglichen

Potenzreihe genau bestimmt werden. Er ist t_1. Aus einem Satz von *Fejér* ergibt sich, daß die Reihe auch noch für t_1 konvergiert. Für (1) kann man analog vorgehen. Man erhält die Konvergenzradien $\pi/2$ bzw. $\frac{\pi}{2} + 1$. Für (3) gebe ich außerdem eine bequemere Methode zur Bestimmung der Koeffizienten der Potenzreihe und mit Hilfe der Sattelpunktmethode eine asymptotische Formel für diese Koeffizienten. Eine solche könnte auch für die zu (1) gehörigen Potenzreihenkoeffizienten auf dieselbe Weise gefunden werden.

Die Umkehrfunktion $u(t)$ von (5) hat ihre Verzweigungsstellen dort, wo $\frac{dt}{du} = 0$ ist, also an den Stellen, wo $u = \frac{4r-1}{2}\pi$ mit ganzen r ist. Die Verzweigungsstellen sind also

$$-\exp\left(\frac{4r-1}{2}\right).$$

Da sie alle reell sind, bestimmen wir die Linien der u-Ebene, auf denen t reell ausfällt. Mit $u = x + iy$ ergibt sich für den Imaginärteil $J(t)$ von t

$$2\,J(t)\left(\sin^2\frac{x}{2}\,\mathrm{Sin}^2\frac{y}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\,\mathrm{Cos}^2\frac{y}{2}\right)e^{-x} = \sin x \sin y + \cos y\,\mathrm{Sin}\,y$$

und da der Faktor von $J(t)$ nie verschwindet, ist t dort reell, wo die rechte Seite verschwindet. Das ist außer für $y = 0$ dort der Fall, wo

$$\sin x = -\,\mathrm{Sin}\,y\,\mathrm{ctg}\,y = -f(y) \tag{7}$$

gilt. $f(y)$ ist eine gerade Funktion, wir können uns also auf positive Werte von y beschränken. $f'(y)$ ist bis auf einen stets positiven Faktor gleich

$$\sin y \cos y - \mathrm{Tg}\,(y) = g(y) \tag{8}$$

Es ist

$$g'(y) = \cos^2 y - \sin^2 y - \mathrm{Cos}^{-2} y = \cos^2 y - \sin^2 y - \cos^2\gamma$$

wo γ die zu y gehörige Hyperbelamplitude ist. Aus $\gamma < y$ folgt für

$$0 < y < \pi/2 \qquad \cos^2\gamma > \cos^2 y$$

so daß diese Werte von y $g'(y)$ und wegen $g(0) = 0$ auch $g(y)$ negativ ist. Für größere Werte von y ist aber $\mathrm{Tg}\,y > \frac{1}{2}$ und daher $g(y)$ nach (8) negativ. $f(y)$ nimmt also für positive Werte von y stets ab. Weiters ist $\lim_{y\to 0} f(y) = 1$. An den übrigen ganzzahligen Vielfachen von π ist $f(y)$ unendlich. In jedem Intervall

$$I_n = [(n-1)\pi, n\pi] \qquad (n \geqq 1, \text{ ganz})$$

gibt es also genau ein Intervall $J_n = (y_n', y_n'')$, in dem $-f(y)$ von -1 auf 1 zunimmt, während außerhalb dieses Intervalles $|f(y)| > 1$ ist. J_n enthält den Mittelpunkt von I_n. Es ist $y_1' = 0$, die übrigen J_n liegen aber ganz im Innern von I_n und ihre Länge nimmt mit zunehmendem n schnell ab. In jedem Streifen der u-Ebene, der durch $y \varepsilon J_n$ definiert ist, liegt schlicht über der x-Achse eine durch (7) definierte, zusammenhängende Linie L_n auf der t reell ist.

L_1 besteht aus einer Reihe von aneinandergereihten kongruenten Bögen, deren einer im Punkt $-\pi/2$ beginnt (unter einem Winkel von 60^0 ansteigend, weil in diesem Punkt 6 Linien zusammentreffen, auf denen t reell ist), bis zum Punkt $\frac{\pi}{2} + i\, y_1''$ monoton ansteigt und dann symmetrisch zu seiner ersten Hälfte bis zum Punkt $3\pi/2$ monoton abfällt. Dieser Bogen heiße B, sein Spiegelbild an der reellen Achse C und die Strecke $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ heiße D. Für $n > 1$ ist L_n eine sich beiderseits ins Unendliche erstreckende Wellenlinie. Wir können nun die zur Funktion (5) gehörige *Riemann*sche Fläche überblicken, begnügen uns hier aber mit der Untersuchung des Bildes des zwischen B und C liegenden Stückes der u-Ebene.

Auf B ist $t(u)$ überall stetig und kein innerer Punkt von t ist Verzweigungspunkt. B wird also auf die Strecke $[-e^{-\pi/2}, -e^{3\pi/2}]$ eineindeutig abgebildet. Ebenso sieht man, daß die Halbstrahlen $[-e^{-\pi/2}, \infty]$ und $[-\infty, -e^{3\pi/2}]$ der reellen t-Achse das eineindeutige Bild von D sind. $t(u)$ ist in dem von B und D begrenzten Gebiet überall analytisch und auf dem Rande bis auf einen einfachen Pol stetig. Das Gebiet zwischen B und D wird also samt seinem Rand eineindeutig auf die abgeschlossene obere t-Halbebene abgebildet. Nach dem *Schwarz*schen Spiegelungsprinzip wird das Gebiet zwischen B und C eineindeutig auf die t-Ebene, aus der die Strecke $[-e^{-\pi/2}, -e^{3\pi/2}]$ herausgenommen ist, abgebildet.

Entwickelt man nun u als Funktion von t um $t = 0$, so geht der Konvergenzkreis durch die nächste singuläre Stelle, hat also den Radius $e^{-\pi/2}$ und der Punkt t_1 (Formel 6) liegt auf seinem Rande. Die Reihe konvergiert aber auch noch dort, da die Funktion $u(t)$ im Konvergenzkreis regulär und schlicht und auf dem Rande noch stetig ist und daher die Voraussetzungen eines Satzes von *Fejér* [2] erfüllt.

Die Koeffizienten a_n der Reihe, von denen in [1] die ersten fünf angegeben sind, kann man auch auf folgende Weise berechnen.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{u(t)}{t^{n+1}}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{u\,t'(u)}{[t(u)]^{n+1}}\,du$$

und nach einmaliger partieller Integration

$$a_n = \frac{1}{2n\pi i}\int [t(u)]^{-n}\,du = \frac{1}{2n\pi i}\int e^{-nz}\,\mathrm{tg}^{-n}\,\frac{u}{2}\,du. \qquad (9)$$

wobei alle Integrale im positiven Sinn um den Ursprung zu nehmen sind.

Bezeichnet man mit $a_{n,k}$ den aus dem letzten Ausdruck bei Ersetzung von tg^{-n} durch tg^{-k} hervorgehenden, so findet man durch partielle Integration die Rekursionsformel

$$a_{n,k} = -\frac{2n}{k-1}\,a_{n,k-1} - a_{n,k-2}$$

und $a_{n,0} = 0$, $a_{n,1} = 2/n$. Es ist $a_n = a_{n,n}$.

Man kann aus (9) auch eine asymptotische Darstellung für a_n gewinnen. Innerhalb des aus B und C gebildeten Weges befindet sich außer der Stelle 0 kein Pol, also kann das Integral auch über diesen Weg genommen werden (Sattelpunktmethode). Wegen der Symmetrie des Integranden bezüglich der x-Achse ist das Integral gleich dem $2i$-fachen Imaginärteil des Integrals über B. Wir berechnen das Integral in zwei Teilen, nämlich vom Punkt $u = 3\pi/2$ bis zu einem Punkt $u = b + ci$ mit $b < \pi/2$ und von diesem Punkt bis $u = -\pi/2$. Das erste Integral ist $O(t(b+ci))^n$. Zur Berechnung des zweiten Integrals setzen wir $k = \sqrt[6]{243/16}$ und führen auf dem Bogenstück den Parameter $z = yk^{-1}$ ein. In einer Umgebung von $u = -\pi/2$ erhalten wir dann eine Potenzreihenentwicklung

$$[t(u(z))]^{-1} = -e^{\pi/2}\,(1 - z^3 + O(z^6))$$

Wenn c bereits so klein ist, daß die Potenzreihe bis $d = ck^{-1}$ konvergiert, ist der Imaginärteil des zweiten Integrals

$$-(-e^{\pi/2})^n\,k\int_0^d [1 - z^3 + O(z^6)]^n\,dz = -(-e^{\pi/2})^n\,k\,I_n.$$

Wenn $nd^6 < 1$ ist, so ist $[1 - z^3 + O(z^6)]^n = (1 - z^3)^n + O(n z^6)$ und

$$I_n = \int_0^1 (1 - z^3)^n + O[(1 - d^3)^n + nd^7] =$$

$$= \Gamma(4/3)\,n^{1/3} + O[\exp(-nd^3) + n^{-1} + n\,d^7].$$

Wählt man $d = n^p$ mit $-\frac{1}{3} < p < -\frac{2}{9}$, so ist die Größenordnung der Restglieder und auch die Größenordnung des ersten Teilintegrals kleiner als die Größenordnung des Hauptgliedes, so daß sich schließlich ergibt, daß a_n asymptotisch gleich

$$\frac{(-1)^{n+1}}{\pi} e^{\frac{n\pi}{2}} \Gamma(4/3) \sqrt[6]{243/16}\, n^{-4/3}$$

ist. Schon für $n = 4$ ist der Fehler nur etwa 1%. Indem man mehr Glieder der Potenzreihe berechnet, könnte man auch mehr Glieder der asymptotischen Entwicklung bestimmen. Will man das, so ist es zweckmäßiger, $\log t\,(u)$ auf B in eine Potenzreihe nach y zu entwickeln und dann eine neue Veränderliche einzuführen, durch die das Integral in die dem Lemma von *Watson* [3] zugrunde liegende Form transformiert wird.

Literatur.

[1] *H. Waadeland*, On some transcendental equations II und III. Kongelike Norske Videnskabers selskab Forhandlinger Bd XXV, 1952, S. 40—49.

[2] *Edm. Landau*, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin, Springer, 1916, S. 11.

[3] *G. N. Watson*, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge Univ. Press, 1952, S. 236.

Buchbesprechungen.

Opere. Von *L. Bianchi*. Vol. I, Teil 2: 276 S. — Vol. II: 335 S. Rom: Edizione Cremonese. 1953.

Erfreulicherweise erscheinen die gesammelten Werke von *L. Bianchi* in rascher Folge. Der zweite Teil aus Band I enthält die große Abhandlung über Normalformen des elliptischen Integrals 1. Gattung, drei Arbeiten über Transformationsgruppen und eine große Anzahl von Arbeiten über partielle Differentialgleichungen. Ferner bringt er die Nachrufe von *L. Bianchi* auf *U. Dini*, *C. Jordan*, *F. Klein*, *S. Lie* und *J. Weingarten*. Die Einleitungen verfaßten *U. Amaldi*, *E. Bompiani*, *E. Bortolotti* und *F. Conforto*. Band II enthält eine ausführliche Einleitung von *R. Calapso* und 16 Arbeiten zur Flächentheorie, darunter die Dissertation von *L. Bianchi*. Druck und Ausstattung der Bände sind vorzüglich.

N. Hofreiter, Wien

Opere. Von *U. Dini*. Vol. 1: Algebra-Geometria Differenziale. 698 S. Rom: Edizione Cremonese. 1953.

Wohl jeder Mathematiker wird schon während seiner Grundausbildung auf den Namen *Dini* gestoßen sein. Wer kennt nicht z. B. das Dini'sche Konvergenzkriterium, die Dini'schen Bedingungen für die Konvergenz der Fourierreihe, seinen Satz über die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen usw. Es ist daher sehr erfreulich, daß nun seine Werke gesammelt herausgegeben werden, und zwar von der „Unione Matematica Italiana" unter Mitarbeit des ‚Consiglio Nazionale delle Ricerche'.

Der vorliegende erste Band enthält im ersten Teil die Arbeiten zur Theorie der unendlichen Reihen und Produkte, im zweiten Teil zahlreiche Arbeiten zur Differentialgeometrie hauptsächlich zur Flächentheorie. Im ersten Teil findet sich auch eine Arbeit über Abschätzungen von Wurzeln algebraischer Gleichungen. Neben einem Bildnis *Dini*'s enthält der Band noch eine Einleitung von *Sansone*, einen Nachruf von *Bianchi*, der *Dini*'s Leben schildert, und zwei spezielle Erläuterungen zu den beiden Teilen von *Cipolla* und *Bortolotti*.

Diesem ersten Band sollen noch zwei weitere Bände folgen, die *Dini*'s Arbeiten über reelle und komplexe Funktionen, Reihenentwicklungen, Potentialtheorie und Differentialgleichungen bringen sollen. Jeder Mathematiker wird in den Werken *Dini*'s viele interessante Dinge finden.

K. Prachar, Wien

Nomological Statements and Admissible Operations. Von *H. Reichenbach*. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) 140 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1954. hfl. 13,50.

Das Problem, welches dieses Buch behandelt, ist zunächst die Frage nach der logischen Abgrenzung der „vernünftigen" Implikation, in der Umgangssprache. Verf. ist der Ansicht, daß jeder im Stande sei, anzugeben, ob eine Implikation vernünftig ist oder nicht, und daß es eine Aufgabe der Logik sei,

Regeln aufzufinden, nach denen solche Entscheidungen getroffen werden. Dabei beschränkt sich der Verf. nicht auf logische Folgerungen, sondern zieht auch „physikalische" Folgerungen, welche Naturgesetze ausdrücken, in den Kreis der Betrachtungen. Beide Arten der Implikation werden vom Verf. unter dem Begriff der nomologischen Implikation zusammengefaßt. Die Fragestellung bringt natürlich des Verf. eigene philosophische Ansichten zum Ausdruck, da der Begriff der „vernünftigen" Implikation objektiv kaum erfaßbar ist und die logische Struktur der Problematik unlöslich mit subjektiv-weltanschaulichen Fragen verbunden ist. Verf. ist allerdings der Ansicht, daß seine Theorie der nomologischen Implikationen und allgemeiner der nomologischen Operationen in hohem Ausmaße ihrer Aufgabe gerecht wird. Die nomologischen Operationen im allgemeinen werden eingeschränkt auf die Gruppe der zulässigen (admissible) Operationen. Diese sind es, welche als „vernünftige" Operationen interpretiert werden können. Zum Teil finden sich diese Untersuchungen schon in des Autors Buch „Elements of Symbolic Logic". Ausgangspunkt ist die Feststellung, daß man die Wahrheitswerttafeln der Aussagenlogik nach zwei Richtungen benützen kann und im allgemeinen auch benützt. Erstens kann man aus dem Wahrheitswert einer Operation auf die Wahrheitswerte der elementaren Aussagen schließen und zweitens kann man in umgekehrter Richtung schließen. Benützt man nur die erste Richtung, dann gelangt man zu den konnektiven Operationen des Verf.. Für alle „vernünftigen" Operationen der Umgangssprache sind die Wahrheitswerttafeln in konnektivem Sinne zu interpretieren. Die Untersuchungen des Verf., auf die hier nicht in allen Einzelheiten eingegangen werden kann, zeigen Berührungspunkte mit neueren *Carnap*schen Auffassungen und im Umkreise dieser philosophischen Anschauungen dürften die Ausführungen auch das größte Interesse erwecken. Dem Mathematiker liegen diese Ideen vielleicht etwas ferner. Dies gilt auch für den Anhang, der eine Teilfrage mit des Verf. Wahrscheinlichkeitsbegriff in Zusammenhang bringt.

L. Schmetterer, Wien

Undecidable Theories. Von *A. Tarski, A. Mostowski* und *R. M. Robinson*. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.) XI, 98 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1953. hfl. 9.—.

Seit dem Erscheinen des berühmten Unvollständigkeitssatzes von *Gödel* wußte auch der Nichtfachmann, daß darin als Spezialfall die Nichtentscheidbarkeit der Zahlentheorie enthalten sei. Die Untersuchungen über die Nichtentscheidbarkeit anderer mathematischer Theorien, weit zerstreut in verschiedenen Zeitschriften oder in den Berichten philosophischer Kongresse, entgingen vielfach der Aufmerksamkeit des an der Grundlagenforschung weniger interessierten Mathematikers. Es liegt daher schon in der Sammlung und Vereinheitlichung dieser Untersuchungen ein großes Verdienst der Autoren. Doch nicht nur das: Viele der hier durchgeführten Studien gehen auf die Autoren zurück. Das Buch zerfällt in drei Teile. Der erste Teil, welcher die Methoden der Unentscheidbarkeitsbeweise darstellt, stammt von *Tarski*, der zweite Teil, welcher sich mit der Unentscheidbarkeit im Rahmen der Arithmetik beschäftigt, geht auf alle im Titel genannte Autoren zurück. Der dritte Teil, welcher die Unentscheidbarkeit der elementaren Gruppentheorie behandelt, wurde wieder von *Tarski* allein verfaßt. Die Monographie ist klar und sehr interessant geschrieben, ist aber wohl ohne einige Vorkenntnisse, welche den erweiterten Prädikatenkalkül sowie die Grundzüge der Theorie der rekursiven Funktionen

betreffen, kaum lesbar. Im ersten Teil werden drei Methoden der Unentscheidbarkeitsbeweise genannt. Erstens der direkte Gödelsche Weg, zweitens indirekte Methoden, welche darin bestehen, daß man entweder von einer als unentscheidbar bekannten Theorie zu einer Subtheorie übergeht oder daß man eine wesentlich unentscheidbare Theorie in der in Rede stehenden Theorie interpretieren kann. Eine Theorie heißt wesentlich unentscheidbar, wenn jede (widerspruchsfreie) Erweiterung dieser Theorie (mit denselben logischen Konstanten) ebenfalls unentscheidbar ist. Den indirekten Methoden ist der erste Teil gewidmet, zu dessen Aufgaben auch zählt, den Begriff der Interpretierbarkeit präzise zu fassen, den *Tarski* schon früher entwickelt hat. Gestützt auf Ergebnisse der genannten drei Autoren, die dann im zweiten Teil ausführlich behandelt werden, folgert man als Anwendung insbesondere die Unentscheidbarkeit der elementaren Körpertheorie und der Theorie der angeordneten Körper.

Der sehr interessante zweite Teil bringt als Hauptergebnis, daß es eine endlich axiomatisierbare Untertheorie der Arithmetik gibt, die wesentlich unentscheidbar ist. Der Beweis stützt sich auf den direkten Gödelschen Weg, welcher hier in nicht zu übertreffender Prägnanz herausgearbeitet wird. Die in Rede stehende Theorie ist eine Untertheorie der auf die Peanoaxiome gestützten Theorie, welche sich von dieser nur durch ein „schwaches" Induktionsaxiom unterscheidet. Diese Theorie hat die interessante Eigenschaft, daß sie keine wesentlich, sondern nur unentscheidbare Untertheorien schlechthin enthält. Man erhält hieraus eine Fülle von Resultaten über die Unentscheidbarkeit von Ringbereichen. Der dritte Teil weist die Unentscheidbarkeit der elementaren Gruppentheorie nach. Sie ist nicht wesentlich unentscheidbar, da die Theorie der Abelschen Gruppen seit einiger Zeit als entscheidbar bekannt ist (*W. Szmielew*). Mir erscheint das Buch als eines der für den Mathematiker bedeutendsten in dieser Sammlung.

L. Schmetterer, Wien

Geschichte der Mathematik. Von *J. E. Hofmann*. Erster Teil: Von den Anfängen bis zum Auftreten von Fermat und Descartes. (Sammlung Göschen: Band 226.) 200 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1953. DM 2.40.

Das Buch gibt einen Überblick über die Geschichte der Mathematik von den Anfängen bis zum 17. Jahrhundert. Die Darstellung ist gedrängt und sehr inhaltsreich. Wer sich näher über Einzelheiten informieren will, findet in dem Literaturverzeichnis die Werke von mehr aus 1000 Autoren. Das Buch enthält nicht bloß die Geschichte der Mathematik, sondern zeigt auch ihre Stellung und Bedeutung in der Kultur. Es beginnt mit der primitiven Mathematik bei den Babyloniern, Ägyptern, Indern und Chinesen. Es hebt das Verdienst der Griechen hervor, aus der Mathematik eine echte Wissenschaft gemacht zu haben. *Euklid*, *Archimedes* und *Apollonius* waren ihre bedeutendsten Vertreter. Sehr viel bringt das Buch über die Mathematik im Mittelalter bei den Indern, Muslimen und Chinesen. Es berichtet von der reichen Übersetzertätigkeit und der Mathematik in der Scholastik im Abendland. Die Neuzeit empfängt ihre großen Impulse aus der erneuten Berührung mit der Antike. Dank dem Aufleben der Naturwissenschaften löst sich nun die Mathematik von der Philosophie und verbindet sich mit den Naturwissenschaften. Es findet eine starke Berücksichtigung der praktischen Gesichtspunkte statt. Das Buch schließt mit der Mathematik im Frühbarock.

N. Hofreiter, Wien

Drei Dialoge über Raum, Zeit und Kausalität. Von *G. Jaffé*. 211 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1954. DM 9.60.

Die heikle Aufgabe, einem nicht mathematisch gebildeten Laien die Anschauungen der modernen Physik zugänglich zu machen, wird sich notwendig darauf beschränken müssen, ihm klarzumachen, daß die klassischen Fundamente nicht denknotwendig sind, sondern durch andere Begriffssysteme ersetzt werden können. Daß sie es müssen und wie dies zu geschehen hat, wird nur andeutungsweise mitteilbar sein, da die experimentellen Grundlagen nur unzulänglich, die mathematischen Hilfsmittel aber gar nicht bei diesem Unternehmen zur Verfügung stehen. Es wird wesentlich vom Geschick des Verfassers abhängen, wieweit er sich dieser Aufgabe mit Erfolg zu entledigen weiß. Das vorliegende Werkchen stellt sicher einen der ansprechendsten und bestgelungenen Versuche in dieser Richtung dar und kann uneingeschränkt empfohlen werden. Nach berühmten Mustern hat der Verf. die Dialogform gewählt und läßt einen zunächst skeptischen Philosophen durch einen jüngeren überzeugten Anhänger der modernen Ideen in klugem Wechselspiel von Einwurf und Widerlegung soweit gebracht werden, daß er die Berechtigung der neuen Physik anerkennen muß. Während die beiden ersten Dialoge, die sich mit der Relativitätstheorie beschäftigen, schon 1931 veröffentlicht wurden, ist der dritte über Kausalität und Quantentheorie neu hinzugekommen und ebenso klar und einleuchtend geschrieben wie die beiden ersten. *J. Radon*, Wien

Geist und Wirklichkeit. Kritische Essays. Von *K. Reidemeister*. III, 92 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1953. DM 8.60.

Die Essays, die der bekannte Geometer uns hier vorlegt, beschäftigen sich mit dem Hauptanliegen der Philosophie, welches ich in ungenauer Form, hier so aussprechen will: Welche Beziehung besteht zwischen dem verstandesmäßigen Denken und der Erfahrung? Wie ist eine Aussage über das Wirkliche möglich? Der Verfasser geht vom Denken aus und wie es bei einem Mathematiker selbstverständlich ist, führt ihn dies zu einer Betrachtung der Mathematik, deren Aufgabe er dahin begreift, daß sie alle logischen Satzsysteme mit festen Umformungsregeln zu untersuchen hat. Damit wird die Sonderstellung der Mathematik klar zum Ausdruck gebracht. Der nächste Schritt, welcher schon zum Hauptthema hinführt, ist die Untersuchung der Beziehung der Geometrie zum Anschauungsraum. Die kombinatorische Topologie erscheint hier als Mittler, wenn ich dies Wort gebrauchen darf, zwischen dem empirischen Raum und dem Raum der Geometrie. Die Essays über Mathematik, Geometrie und Grundlagenforschung sind die, welche den Mathematiker am meisten interessieren und es wäre wünschenswert, wenn man sich mit den hier vorgebrachten Gedanken in ausführlicher Form auseinandersetzen würde.

Es erscheint mir hier nicht am Platze, die weiteren Essays zu besprechen und sich mit ihnen auseinanderzusetzen. Sie beschäftigen sich zunächst mit dem Geist als Phänomen und der Verträglichkeit der Naturwissenschaft mit dem kritischen Denken und gipfeln in einer kritischen Philosophie, welche eine Spiegelung an der transzendentalen Ästhetik von *Kant* einschließt.

Der Verfasser vermeidet, um allgemein verständlich zu sein, jede Fachsprache und vor allem die Zeichensprache der mathematischen Logik, welche eine verbindlichere Ausdrucksweise gestattet hätte. Der Verlag hat diesem Werk eine dem Inhalt würdige Ausstattung gegeben. *E. Hlawka*, Wien

Primzahlen. Von *E. Trost*. („Elemente der Mathematik vom höheren Standpunkt": Band II.) 95 S. Basel-Stuttgart: Verlag Birkhäuser. 1953. sfr. 13.50.

Primzahlen gehören zu den Elementen der Mathematik, für die stets großes Interesse bestand. Über sie ein Buch von höherem Standpunkt zu schreiben, paßt ausgezeichnet in die von *L. Locher-Ernst* herausgegebene Reihe. Obwohl an Vorkenntnissen vom Leser nur Differential- und Integralrechnung vorausgesetzt wird, führt es sehr weit und gibt einen sehr schönen Einblick in das Gebiet der Primzahltheorie. Zunächst werden die zahlentheoretischen Hilfsmittel entwickelt. Dann folgen allgemeine Primzahlkriterien, insb. Primzahldarstellung durch quadratische Formen. Es folgen: spezielle Primzahlen, insb. die von *Mersenne* und *Fermat*, dann Primzahlsummen, insb. die Summe der reziproken Primzahlen, Abschätzungen über die Funktion $\pi(x)$. Kap. VII und VIII bringen „elementare", d. h. funktionentheoriefreie Beweise des Primzahlsatzes und des Satzes über die arithmetische Progression. Kap. IX und X berichten vom Brunschen Siebverfahren und von der Goldbachschen Vermutung. Die Darstellung ist etwas knapp, aber sehr klar und anregend. Inhaltlich ist das Buch sehr reich und ganz modern. Es kann bestens empfohlen werden.

N. Hofreiter, Wien

Lineare Algebra. Normalformen von Matrizen. Von *G. Pickert*. (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften: Band I: Algebra und Zahlentheorie. Zweite Auflage. 1. Teil: B: Algebra: Heft 3, Teil I.) 72 S. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, in Verwaltung. 1953. DM 7.50.

Aus verschiedenen Gebieten der Mathematik wie: Analytische Geometrie, Theorie der quadratischen Formen, Invariantentheorie, projektive Geometrie und Differentialgeometrie, Differential- und Integralgleichungen, Idealtheorie erhielt die lineare Algebra mannigfache Anregungen und Ergänzungen. So trat das Grundproblem der linearen Algebra, d. i. die Lehre von der Auflösung linearer Gleichungssysteme in den Hintergrund. In der modernen abstrakten Darstellung ist die lineare Algebra eine Theorie der Moduln und Vektorräume und davon berichtet die erste Arbeit in erster Linie. Die zweite Arbeit enthält die Elementarteilertheorie und die verschiedenen Äquivalenzbegriffe für Matrizen in moderner Darstellung.

N. Hofreiter, Wien

Allgemeine Theorie der algebraischen Zahlen. Von *Ph. Furtwängler* †. Überarbeitet von *H. Hasse* und *W. Jehne*. (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften: Band I: Algebra und Zahlentheorie. Zweite Auflage. 2. Teil: C: Reine Zahlentheorie: Heft 8, Teil II.) 50 S. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, in Verwaltung. 1953. DM 6.—.

In den letzten Jahren seines Lebens hat *Ph. Furtwängler* an diesem Artikel gearbeitet und ihn in abgeschlossener Form der Redaktion überreicht. Durch die Ungunst der Zeiten blieb der Aufsatz ungedruckt liegen. Erst 12 Jahre später haben *H. Hasse* und *W. Jehne* das Manuskript überarbeitet und ergänzt. Die Änderungen betreffen nicht nur die inzwischen erschienene Literatur, sondern auch eine stärkere Betonung der auf *K. Hensel* zurückgehenden Theorie der p-adischen Zahlen, die dank des Ausbaus durch *H. Hasse* und anderen Mathematikern eine wichtige Rolle in der modernen algebraischen Zahlentheorie spielt. Das Heft enthält die verschiedenen Begründungen der Idealtheorie in algebraischen Zahlkörpern, wobei die von *R. Dedekind* im Vordergrund steht. Es folgen: Sätze über Differente und Diskriminante, Zerlegungsgesetze in Erweiterungskörpern, Theorie der Einheiten, die *Artin*schen Führer und *Artin*schen L-Funktionen und die Klassenzahl.

N. Hofreiter, Wien

Darstellungstheorie unendlicher Gruppen und fastperiodische Funktionen. Von *W. Maak*. (Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften: I, 1, 16.) 26 S. Leipzig: B. G. Teubner, in Verwaltung. 1953. DM 3.—.

Der vorliegende Artikel behandelt im ersten Teil die Theorie der fastperiodischen Funktionen wie sie etwa im Buch des Verfassers (siehe Monatshefte **55**, S. 95, 1951) ausführlich dargestellt ist. Im zweiten Teil werden die verschiedenen Verallgemeinerungen des Begriffes fastperiodisch und der Werte und Definitionsbereiche der fastperiodischen Funktionen referiert. Im dritten Teil finden wir verschiedene Anwendungen z. B. auf Entwicklungen nach Kugelfunktionen, Darstellungen kompakter Gruppen und den Dualitätssatz von *Pontrjagin* mit der Erweiterung von *Tannaka* für den nichtkommutativen Fall.

Obwohl keine Beweise gegeben werden, ist die Darstellung immer klar und verständlich und vermittelt auch dem Nichtfachmann eine gute Übersicht über ein sehr interessantes Gebiet der modernen Mathematik.

K. Prachar, Wien

Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure. Von *R. Rothe*. Herausgegeben von *W. Schmeidler*. Teil III: Flächen im Raum. — Linienintegrale und mehrfache Integrale. — Gewöhnliche Differentialgleichungen reeller Veränderlicher nebst Anwendungen. Sechste Auflage. Mit 166 Textabb., 242 S. Stuttgart: B. G. Teubner. 1953. DM 8.20.

Mit Rücksicht auf den kürzlich erschienenen Band VI, der von *I. Szabó* bearbeitet wurde und der von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen handelt, wurden im Band III einige Abänderungen vorgenommen. So wurden die partiellen Differentialgleichungen ganz weggelassen. An manchen Stellen im Abschnitt über gewöhnliche Differentialgleichungen wurden kleine Verbesserungen und Ergänzungen vorgenommen. Stark umgearbeitet wurde § 28, der von Schwingungen handelt. Neu hinzugekommen ist § 30: Numerische Methoden zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Nach allgemeinen Erörterungen folgt die Methode von *Runge-Kutta* und das Verfahren von *Adams-Störmer*. Die letzten Rezensionen über Band III erfolgten in Monatsh. Math. **55**, 97 (1951), **56**, 258 (1952).

N. Hofreiter, Wien

Höhere Mathematik für den Praktiker. Von *G. Joos* und *Th. Kaluza*. Siebente, Auflage. Mit 93 Textabb., XII, 387 S. Leipzig: J. A. Barth. 1954. DM 21.60, geb. DM 23.10.

Die erste Auflage erschien 1938, die fünfte 1951 und nun schon die siebente. Dies zeigt, daß das Buch gerne gekauft wird und dem Ingenieur und Physiker sehr willkommen ist. Es ist ein Buch für solche, die die Mathematik brauchen, aber nicht Mathematiker werden wollen. Angehenden Mathematikern sind exakter geschriebene Lehrbücher anzuraten. Wohl werden auch hier die grundlegenden Begriffe wie der Differentialquotient und das Integral als Grenzwerte erklärt, dem Leser wird aber bald nachher zugemutet, sich darunter Quotienten bzw. Summen von unendlichkleinen Größen vorzustellen. Gegen das Rechnen mit Differentialen ist vom mathematischen Standpunkt nichts einzuwenden; es kommt nur auf die Art der Darstellung an. Daß sich die Autoren eines Buches, das für Praktiker bestimmt ist, wenig Skrupel über notwendige und hinreichende Voraussetzungen machen, ferner viele Beweise mehr plausibel als exakt führen, darf nicht wundern. Das Buch enthält die Differential- und Integralrechnung,

ferner Analytische Geometrie und Differentialgleichungen, etwas Differentialgeometrie, Variationsrechnung, Algebra und Funktionentheorie. Es ist also inhaltlich außerordentlich reich und die Stoffauswahl kann als sehr vorteilhaft bezeichnet werden. Sehr wertvoll für den Praktiker sind die vielen physikalischen Beispiele. Bei der nächsten Auflage kann leicht folgendes berücksichtigt werden: Man schreibt heute $\lim_{x \to a}$ statt $\lim_{x=a}$. Eine Matrix, die aus einer anderen durch Vertauschen von Zeilen und Spalten hervorgeht, heißt die zu dieser „transponierte" Matrix (nicht „adjungiert", siehe S. 376 und 378).

N. Hofreiter, Wien

Colloque sur les Fonctions de plusieurs Variables. (Centre Belge de Recherches Mathématiques.) 160 S. Liège: Thone. — Paris: Masson & Cie. 1953. ffr. 1800.-.

Nachdem schon früher das Mathematische Forschungszentrum in Belgien die Vorträge der Kolloquien über Algebraische Geometrie, Differentialgeometrie und Topologie der gefaserten Räume veröffentlicht hat, sind nun auch die Vorträge des Kolloquiums über Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen erschienen. Man braucht wohl nicht hervorzuheben, wie wertvoll es ist, wenn ein Gebiet, auf dem die Forschungen noch in vollem Gange sind, von hervorragenden Fachleuten einem breiteren Kreise von Mathematikern zugänglich gemacht werden. Im einzelnen sind folgende Vorträge abgedruckt: *F. Severi*, Einige Probleme über analytische Funktionen mehrerer Veränderlicher; *M. P. Lelong*, Mehrfachsubharmonische Funktionen und dazugehörige Radonsche Maße; *H. Cartan*, Komplexe analytische Mannigfaltigkeiten und Kohomologietheorie; *M. J. Serre*, Probleme im Großen für die Mannigfaltigkeiten von *Stein*; *P. Roquette*, Die Arithmetik der Abelschen Funktionen; *H. Behnke*, Der Satz von *Runge* für mehrdeutige Funktionen; *K. Stein*, Analytische Projektion komplexer Mannigfaltigkeiten; *E. Martinelli*, Satz von *Cauchy* für Funktionen mehrerer Variablen; *W. Saxer*, Über Bereiche in denen Familien von solchen Funktionen normal sind; *S. Bergman*, Über die ‚Kernfunktion'. (Über die letztere siehe auch die Besprechung des Bergmannschen Buches in Monatshefte **55**, 254, 1951).

K. Prachar, Wien

Complex Variable Theory and Transform Calculus with Technical Applications. Von *N. W. McLachlan*. Zweite Auflage. Mit 108 Textabb., XI, 388 S. Cambridge: At the University Press. 1953. Geb. 55 s. net.

Das vorliegende Buch ist der Laplace Transformation (LT) und ihren Anwendungen gewidmet. Dem eigentlichen Gegenstand ist eine Einführung in die Funktionentheorie vorangestellt, in deren Mittelpunkt die Auswertung von Integralen im Komplexen steht. Der Teil, der die Theorie der LT behandelt, geht verhältnismäßig nicht sehr weit, dafür bringt der Teil, der die technischen Anwendungen behandelt, außerordentlich viel. Die vorgeführten Anwendungen, aus den verschiedensten Gebieten, welche der Praxis entnommen sind, werden bis in die numerischen Einzelheiten und technischen Details genau auseinandergesetzt und machen die Bedeutung des Buches aus. Es enthält viele eigene Beiträge des Verfassers. Die Darstellung ist im ganzen Buch sehr klar und ausführlich und wird durch viele Zeichnungen unterstützt. Echt angelsächsischer Tradition entsprechend, enthält jedes Kapitel eine Fülle von ausführlich behandelten Beispielen. Dadurch wird ein restloses Verständnis der Theorie und ihrer Anwendung erreicht. Dieses Buch kann nur wärmstens empfohlen werden.

E. Hlawka, Wien

Elementary Differential Equations. Von *L. M. Kells.* Vierte Auflage. Mit 102 Textabb., X, 265 S. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company. 1954. $ 4.—.

Dies ist ein Lehr- und Übungsbuch über Differentialgleichungen, das ob seiner leicht verständlichen Darstellung auch zum Selbststudium sehr geeignet ist. Ziel des Buches ist, den Leser mit den üblichen und bewährten Methoden zum Lösen von Differentialgleichungen vertraut zu machen. Vielfach werden die Methoden an Hand von Beispielen erklärt und jedenfalls stets an zahlreichen Beispielen geübt. Das Buch enthält über 1100 Übungsaufgaben samt den Lösungen. Der größte Teil des Buches ist den gewöhnlichen Differentialgleichungen gewidmet; partielle Differentialgleichungen werden nur kurz behandelt. Bevorzugt wird das Rechnen mit Operatoren. Besonders ausführlich werden die Anwendungen auf Geometrie, Mechanik, Elektrizität usw. gepflegt.

N. Hofreiter, Wien

Linear Analysis. Von *A. C. Zaanen.* (Bibliotheca Mathematica: Band II.) VII, 610 S. Amsterdam: North-Holland Publishing Co. 1953. hfl. 38.—.

Das Werk rankt sich um die Theorie der linearen Transformationen über Banachschen Räumen. Der Begriff des Banachschen und des Hilbertschen Raumes wird so gefaßt, daß nicht notwendig vollständige Räume darunter verstanden werden. Ein besonderer Vorzug der Darstellung scheint es mir zu sein, daß der Verf. die Mühe nicht gescheut hat, die allgemeine Theorie stets ausführlich an den wichtigsten konkreten Räumen zu illustrieren. Es werden dabei auch Beispiele herangezogen, die sonst weniger Beachtung finden, wie der Raum von *Orlicz* und der Raum der im Sinne von *Besicovitch* fastperiodischen Funktionen. Das Werk zerfällt in drei Teile. Für den des Maßbegriffes und *L*-Integrales unkundigen Leser wird im ersten Teile eine vollständige Einführung in diese Theorie gegeben. Die Einführung des Maßes gründet sich auf den Begriff des Halbringes, ein Vorgang, der sich in einer zusammenfassenden Darstellung schon früher bei *v. Neumann*, „Functional operators" findet. Der Inhalt des zweiten Teiles kann zunächst durch seine Überschrift charakterisiert werden: Beschränkte Transformationen und kompakte Transformationen im Banachschen und Hilbertschen Raum. Der Verf. beginnt mit der Einführung der in der Überschrift genannten Räume, bespricht dann die beschränkten, linearen Transformationen und nimmt Gelegenheit anläßlich eines Kapitels über Banachsche Räume endlicher Dimension zu den Grundzügen der kanonischen Darstellung und der Elementarteilertheorie von Matrizen zu gelangen. Im folgenden tritt zu Tage, daß dieser zweite Teil natürlich durchaus selbständiges Interesse besitzt, jedoch in vielem auf den dritten Teil, der die allgemeine Theorie der nicht singulären linearen Integralgleichungen zum Gegenstand hat, hindeutet. Bei der Behandlung der kompakten (vollstetigen) Transformationen stützt sich der Verf. insbesondere auf die von *Riesz* und später von *Schauder* entwickelte Theorie der Funktionalgleichungen. Hier finden sich auch zwei Verallgemeinerungen des klassischen v. Neumannschen Ergodensatzes (*Yosida*). Der dritte Teil ist in besonders hohem Maße Eigentum des Verf., der bekanntlich in einer langen Reihe von Arbeiten wesentlich zur Entwicklung der Theorie der nicht singularen linearen Integralgleichungen beigetragen hat. Gleich zu Beginn findet sich die allgemeine Theorie dieser Integralgleichungen in *Orlicz*-Räumen. Ebenso geht die Behandlung der Integralgleichungen mit symmetrisierbaren Kernen vielfach auf den Verf. zurück. Insbesondere sei auf die wichtigen allgemeinen Entwicklungssätze hingewiesen.

Die Darstellung ist gut verständlich. Der Fachmann auf diesem Gebiete wird das Buch gern benützen.

L. Schmetterer, Wien

Singular Integral Equations. Von *N. I. Muskhelishvili*. Aus dem Russischen übersetzt von J. R. M. Radok. 447 S. Groningen: P. Noordhoff. 1953. hfl. 28.50.

Es ist dringend zu wünschen, daß die reiche und wertvolle mathematische Literatur russischer Sprache durch gute Übersetzungen der westlichen Welt bequemer zugänglich gemacht werde. Daher ist es sehr zu begrüßen, daß der rührige Verlag Noordhoff diese vorzügliche englische Ausgabe herausgebracht hat.

Der Autor beschäftigt sich mit jenem speziellen Typus von Integralgleichungen, bei denen die Integrale längs vorgeschriebener Wege in der komplexen Ebene laufen und der Kern dieselbe Singularität hat, wie sie bei der Cauchyschen Integraldarstellung analytischer Funktionen auftritt, also einen einfachen Pol in $z = \zeta$. Bereits *Poincaré* und *Hilbert* haben sich mit diesem Fall beschäftigt und insbesondere hat *Plemelj* diese Art Integralreichungen erfolgreich zur Lösung von Aufgaben der Potential- und Funktionentheorie verwendet. Hier findet man nun eine einheitliche Darstellung der Theorie, die in wichtigen Einzelheiten durch den Autor und seine Schüler am Mathematischen Institut in Tiflis ergänzt und vervollkommnet wurde. Die Integrationswege werden als glatt vorausgesetzt und die Randfunktionen einer *Hölder*-Bedingung unterworfen. Dieser bewußte Verzicht auf größtmögliche Allgemeinheit bewirkt, daß sich die Ergebnisse einfach formulieren lassen und unmittelbare Verwendung bei Problemen der Praxis gestatten. Es werden außer den rein mathematischen Fragestellungen (Riemann-Hilbertsches Problem der Funktionentheorie, Randwertaufgaben beim logarithmischen Potential u. a. m.) verschiedene Aufgaben der ebenen Elastostatik für Halbebene und Kreisbereiche gelöst. Zum Abschluß werden die zunächst für geschlossene Integrationswege und stetige Randfunktionen hergeleiteten Ergebnisse auf nicht-geschlossene Wege und Randfunktionen mit einer endlichen Anzahl von Unstetigkeitsstellen erster Art ausgedehnt, eine Integrodifferentialgleichung der Tragflügeltheorie behandelt sowie die Verallgemeinerung der Theorie auf Systeme von Integralgleichungen an einem Beispiel aus der Funktionentheorie durchgeführt.

Das klar und sorgfältig geschriebene Buch wird sowohl jenen Lesern nützlich sein, die die Methode zwecks ihrer Anwendungen studieren wollen, als auch solchen, die darin Anregungen zu weiteren Forschungen auf diesem interessanten Gebiet der Analysis suchen.

J. Radon, Wien

Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists. Von *P. F. Byrd* und *M. D. Friedman*. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, F. Rellich, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden: Band LXVII.) Mit 22 Textabb., XIII, 355 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1954. DM 36.—, geb. DM 39.60.

Das Buch ist kein Lehrbuch, sondern ein Handbuch, das neben Integralformeln zahlreiche andere Formeln für elliptische Funktionen enthält. Vom Leser werden nur geringe Kenntnisse verlangt, wohl aber muß er sich unter

3000 Formeln zurecht finden. Bei Büchern, die so viele Formeln enthalten, ist die Anordnung von besonderer Wichtigkeit. Diese ist aber wirklich sehr klar. Die Nummern 110—165 enthalten Definitionen und grundlegende Formeln für elliptische Integrale, elliptische Funktionen von Jacobi, die Lambdafunktion von Heuman und zahlreiche Transformationsformeln für elliptische Funktionen und elliptische Integrale. Die Nummern 200—299 bringen die Reduktion der algebraischen, der trigonometrischen und der hyperbolischen Integranden auf Jacobische elliptische Funktionen. Diese Funktionen werden in den Nummern 310—440 integriert. Die weiteren Nummern enthalten elliptische Integrale, die aus Laplace-Transformation entstehen, hyperelliptische Integrale, Integrale der elliptischen Integrale, Differentialformeln und Reihenentwicklungen. Im Anhang werden die elliptischen Funktionen und Integrale von Weierstraß kurz behandelt. Auch finden sich dort wertvolle Zahlentafeln. Ausführliche Erklärungen und wechselseitige Verweisungen helfen dem Leser, die Formeln leichter zu verstehen und ein Integral schneller auszuwerten. *N. Hofreiter*, Wien

Stability Theory of Differential Equations. Von *R. Bellman.* (International Series in Pure and Applied Mathematics.) IX, 166 S. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company. 1954. $ 5.50.

Die fundamentale Bedeutung der Stabilitätstheorie für viele Teile der Mathematik und der Physik ist wohl bekannt. Ebenso bekannt ist es aber, daß die Theorie zu den schwierigsten Gebieten der Mathematik gehört. Der Verfasser unternimmt es, in dem vorliegenden Buch eine Einführung in dieses Gebiet zu geben. Es sei gleich bemerkt, daß es ihm gelungen ist, ein leicht verständliches Lehrbuch zu schreiben, welches in bequemer Weise, die Beherrschung des Gegenstandes ermöglicht. Das Buch setzt nur die bescheidensten Vorkenntnisse der Analysis voraus. Es beginnt mit den linearen Differentialgleichungssystemen. Die Verwendung der Matrixschreibweise (alles Benötigte wird entwickelt) ermöglicht eine elegante Behandlung. Auf die so erhaltenen Resultate aufbauend, wird die Theorie der nicht linearen Systeme entwickelt. Es sei hier hervorgehoben, daß der Verfasser sich nie damit begnügt, immer nur einen Beweis für ein Theorem zu geben, sondern daß er für die entwickelten Sätze verschiedene Beweise gibt, um eine Reihe von wichtigen Methoden zur Behandlung von Stabilitätsproblemen zu erläutern. Eine spezielle Behandlung erfahren nun die Differentialgleichungen $P(t, u, u') = 0$ (P Polynom), die besonders wichtige Differentialgleichung $(k\,u')' + l\,u = 0$ und die Emdensche Differentialgleichung.

Besonders zu begrüßen ist die instruktive Darstellung, die nicht eine trockene Sammlung von Definitionen, Sätzen und Beweisen ist. Der Verfasser ist um eine einwandfreie Beweisführung bemüht, was auf diesem Gebiet nicht selbstverständlich ist. Jedem Abschnitt des Buches ist eine Reihe von interessanten Aufgaben (hübsch ist der Beweis der Hölderschen Ungleichung) und Literaturangaben beigefügt. Es kann nur wiederholt werden, daß dieses Gebiet, auf dem so hervorragende Forscher, wie *H. Poincaré*, *A. Liaponnoff*, *P. Boutroux*, *E. Borel*, *O. Perron*, *G. H. Hardy* und *R. H. Fowler* gearbeitet haben und welches in letzter Zeit wieder in den Mittelpunkt des Interesses gerückt ist, in dem vorliegenden Buch eine glänzende Darstellung gefunden hat. *E. Hlawka*, Wien

Grundzüge der Ausgleichsrechnung, nach der Methode der kleinsten Quadrate nebst Anwendungen in der Geodäsie. Von *W. Großmann.* Mit 54 Textabb., VIII, 261 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1953. Geb. DM 19.80.

Das Buch bringt die Grundlage der Ausgleichsrechnung in breiter, leicht verständlicher Darstellung und eignet sich vorzüglich als Lehrbuch für Studierende. Es wird aber auch sicher gern von angewandten Mathematikern und Ingenieuren benutzt werden, die damit ihre Kenntnisse leicht auffrischen und erweitern können. Die Vorkenntnisse gehen nicht über die Differential- und Integralrechnung hinaus. Nicht einmal Kenntnisse der linearen Algebra werden vorausgesetzt. Daher wird die seit *Gauß* bewährte und gut eingebürgerte Schreibweise beibehalten und somit nicht die moderne Darstellung durch Matrizen benutzt. Das Buch bringt zunächst die Grundzüge der Fehlertheorie und sodann die Ausgleichsrechnung von direkten, von vermittelnden und von bedingten Beobachtungen. Dabei kommen alle in der Praxis wichtigen Verfahren zur Sprache. Sie werden ausführlich erklärt, übersichtlich angeordnet und an zahlreichen meist der Praxis entnommenen Beispielen eingeübt. Das Buch hält die Mitte zwischen den kurzen Einführungen in die Ausgleichsrechnung und den umfassenden Standardwerken. Neben seinen sonstigen Vorzügen wird sich das Buch auch deshalb, weil es die rechte Mitte hält, als Lehrbuch bestens bewähren.

N. Hofreiter, Wien

Principles of Numerical Analysis. Von *A. S. Householder*. (International Series in Pure and Applied Mathematics.) X, 274 S. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company. 1953. $ 6.—.

Die Literatur über numerische Methoden zur Auflösung von Gleichungen und Gleichungssystemen und über die approximative Darstellung von Funktionen ist ungemein umfangreich und besonders in den letzten Jahren sehr angeschwollen. Der Verf. führt rund 300 Arbeiten in seinem Literaturverzeichnis an, womit er keineswegs Vollständigkeit anstreben will. Das Buch ist kein Kompendium von Methoden, sondern ein Lehrbuch, in dem eine große Anzahl von bewährten Methoden gründlich und so weit dies möglich ist, einheitlich dargestellt werden. Um vom Leser im wesentlichen nur die Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung voraussetzen zu müssen, bringt das Buch viel aus der linearen Algebra. Der Stoff zerfällt in folgende zwei Teile: 1. Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen, 2. Approximative Darstellung von Funktionen. Jedes Kapitel enthält zunächst theoretische Ausführungen, die meist recht inhaltsreich sind; dann folgen approximative Methoden, von denen die iterativen und die direkten besonders gepflegt werden. Bei den numerischen Methoden wird auf das Rechnen mit modernen Rechenmaschinen besonders Rücksicht genommen. Am Ende jedes Kapitels steht ein ausführlicher Literaturbericht, der besonders die neueren Arbeiten berücksichtigt. In dem Buch steht die Theorie stets im Vordergrund; es ist ein inhaltlich sehr reiches Lehrbuch und kein Übungsbuch.

N. Hofreiter, Wien

Statistics for Technologists. Von *C. G. Paradine* und *B. H. P. Rivett*. Mit 50 Textabb., VII, 288 S. London: English Universities Press Ltd. 1953. Geb. 25 s. net.

Das Buch unterscheidet sich von manchen ähnlichen dadurch, daß nicht nur die Methoden der technischen Statistik gebrauchsfertig dargeboten werden, sondern daß auch ein tieferes Verständnis dieser Methoden erreicht werden soll. Diesem Zweck dient insbesondere der erste Teil, welcher in leicht verständlicher Weise Grundzüge der Wahrscheinlichkeitstheorie entwickelt und die wichtigsten Verteilungen der normalen Stichprobentheorie bespricht. Stellenweise führt die Darstellung etwas weiter als sonst in dieser Sparte üblich, z. B. wird der *Behrens-Fisher*-Test besprochen. Es folgt die Konstruktion der $\bar{X}$-R-Kontrollkarte,

eine Einführung in das einfache und doppelte Stichprobenverfahren und die Sequential-Analyse. Der weitere Inhalt ist durch die Stichworte: Klassische Fehlertheorie und Methode der kleinsten Quadrate, Korrelationstheorie und Varianzanalyse gekennzeichnet. Das letzte Kapitel gibt die Grundzüge des Maximum Likelihood-Prinzips und seine Anwendung auf die Probit-Analysis, die allerdings vor allen Dingen den Biologen und vielleicht weniger den Techniker interessiert. Zahlreiches Übungsmaterial und Tabellen dienen den Bedürfnissen des Praktikers.

L. Schmetterer, Wien

Planen und Auswerten von Versuchen. Von *A. Linder*. 182 S. Basel: Verlag Birkhäuser. 1954. sfr. 17.50, geb. sfr. 21.—.

Wenn man heute einen Nichtfachmathematiker, der in seinem Gebiet die Methoden der modernen Statistik anwenden möchte, ein deutschsprachiges Lehrbuch über diesen Gegenstand empfehlen möchte, dann pflegt man zu sagen: „Nehmen Sie den *Linder*." Es ist anzunehmen, daß man dieselbe Auskunft geben wird, wenn man jemand eine deutschsprachige Einführung in die statistischen Methoden der Versuchsplanung geben will. Der Verf. hat diesmal fast ausschließlich auf die Bedürfnisse des Praktikers Rücksicht genommen und sich mit wenigen mathematischen Andeutungen begnügt, angesichts der kürzlich erschienenen für den Mathematiker geeigneten Monographien von *Kempthorne* und *Mann*, sicherlich ein vertretbares Verfahren. Die Stoffauswahl: Blöcke mit zufälliger Anordnung, lateinische Quadrate, Versuche in Teilparzellen, Mehrfaktorenexperiment, unvollständige Blöcke, muß als gelungen bezeichnet werden. Die zahlreichen Beispiele verraten die Hand des erfahrenen Praktikers. Die Einleitung, welche das Eingreifen der Statistik in die Versuchsplanung begreiflich macht, bringt auch einiges, was der Leser der erwähnten früheren Buchpublikation des Autors schon kennt. (Einfache Streuungszerlegung, Prüfung von Durchschnitten und Streuungen.) Man kann die Rezension nicht schließen, ohne dem Autor auch den Dank für die Mühe der zum Teil ausgezeichnet gelungenen Verdeutschungen auszusprechen, die sicherlich rasch anerkannt werden.

L. Schmetterer, Wien

Theorie und Praxis der Rechenmaschinen. Von *A. Rohrberg*. (Mathematisch-physikalische Bibliothek: Reihe I, Band 97.) Mit 12 Textabb., 72 S. Stuttgart: B. G. Teubner. 1953. DM 3.90.

Ziel des Buches ist, große Kreise von Personen mit dem Bau und der Arbeitsweise von Rechenmaschinen vertraut zu machen. Elektronische Rechenmaschinen werden nicht betrachtet, sondern verschiedene Typen der gewöhnlichen Vierspeziesrechenmaschinen. Abgesehen von den vier Grundrechnungsarten werden Quadrat- und Kubikwurzeln, ferner quadratische Gleichungen behandelt. Der Verf. zeigt nicht bloß, wie gerechnet werden kann, sondern wie es am zweckmäßigsten ist. Zahlreiche Beispiele aus der vielfältigen Praxis erhöhen den Wert des Buches. Die Darstellung ist für jedermann verständlich. Es ist damit zu rechnen, daß das Buch sehr viele Freunde finden und gerne gekauft wird. Es sei mir erlaubt, zu sagen, daß die Bemerkung auf Seite 32 über die größte bekannte Primzahl überholt ist.

N. Hofreiter, Wien

Der pythagoreische Lehrsatz. Von *W. Lietzmann.* Siebente Auflage. (Mathematisch-physikalische Bibliothek: Reihe 1, Band 2/3.) Mit 73 Textabb., 96 S. Stuttgart: B. G. Teubner. 1953. DM 3.60.

Der Verf. bringt mehrere methodisch stark verschiedene Beweise für den bekannten Lehrsatz und gibt zuletzt einen Ausblick auf das noch immer ungelöste Fermatsche Problem. Die Darstellung ist interessant, leicht verständlich und für weite Kreise bestimmt. Die letzte Besprechung des Buches erfolgte in dieser Zeitschrift: Monatsh. Math. **56**, 175 (1952).

N. Hofreiter, Wien

Projektive Geometrie. Von *H. Prüfer.* Aus dem Nachlaß herausgegeben von G. Fleddermann und G. Köthe. Zweite Auflage. Mit Textabb., VII, 314 S. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1953. Geb. DM 9.—.

Das Buch liefert eine Einführung in die projektive, affine und metrische Geometrie in axiomatischer Darstellung. Neben der euklidischen Geometrie werden auch die nicht-euklidischen Geometrien axiomatisch aufgebaut. Die letzten zwei Kapitel enthalten die Grundzüge der darstellenden Geometrie und Zusammenhänge mit der analytischen Geometrie. Da sich die zweite Auflage kaum von der ersten unterscheidet, so verweise ich auf die ausführliche, wohlwollende Besprechung durch *K. Strubecker* in Monatsh. Math. **49**, 23 (1941).

N. Hofreiter, Wien

Wo steckt der Fehler? Von *W. Lietzmann.* Dritte Auflage. Mit 121 Textabb., 185 S. Stuttgart: B. G. Teubner. 1953. DM 5.80.

Das bekannte Büchlein erscheint jetzt in einem Teil und ist durch zahlreiche Ergänzungen auf 185 Seiten angewachsen. Siehe die letzte Besprechung in den Monatsh. Math. **55**, 99 (1951). Die neue Auflage enthält gegenüber der früheren je ein Kapitel über Fehlschlüsse in der Analysis und über Autorenfehler.

J. Lewandowski, Wien

Albert Einstein. Sein Werk und sein Einfluß auf unsere Welt. Von *L. Infeld* 174 S. Wien: Schönbrunn-Verlag. 1953.

Das Buch enthält den Versuch, die neuen Ideen der theoretischen Physik in populärer Form darzustellen, wobei den Forschungen von *A. Einstein* eine zentrale Stellung zugewiesen ist. Der Verfasser ist zu der gestellten Aufgabe sicher legitimiert, da er anerkanntermaßen zu den bedeutendsten lebenden theoretischen Physikern gehört und Jahre hindurch ein enger Mitarbeiter von *Einstein* war. Naturgemäß kann das Buch von *Infeld* keine definitive Lösung der großen Aufgabe darstellen, aber es bedeutet sicher eine beachtenswerte Etappe auf dem Wege zum endgültigen Ziel. Es wird noch einige Zeit dauern, bis es gelingt, die mathematischen Formeln in die Sprache des Alltags zu übertragen.

Der Rezensent hat selbst durch 40 Jahre den Physikunterricht an der Oberstufe von Mittelschulen geführt und dabei stets den Versuch unternommen, die neuen Ideen in den alten Rahmen einzubauen. Nach solchen Büchern wie das von *Infeld* hat er mit wahrer Gier gegriffen und so hofft er, daß auch die heute im Dienst stehenden Mittelschullehrer nicht achtlos an dem Werk von

Infeld vorbeigehen, sondern manches von ihm für den Unterricht verwenden werden.

J. Lewandowski, Wien

Introduction to Tensors, Spinors, and Relativistic Wave-Equations (Relation Structure). Von *E. M. Corson*. XIII, 221 S. London und Glasgow: Blackie & Son Limited. 1953. Geb. 55 s. net.

In der theoretischen Physik ist in den letzten Jahren, hauptsächlich durch das Bemühen, die Natur der Elementarteilchen zu klären und die Ideen der Relativitätstheorie und der Quantenmechanik zu vereinigen, eine größere Anzahl von Formalismen entstanden, deren Bedeutung oft nur einem ganz kleinen Kreis von Spezialisten klar ist. Das vorliegende Werk stellt sich die Aufgabe, alle diese Theorien im Zusammenhang darzustellen, und zwar mit besonderer Berücksichtigung der Zweckmäßigkeit des mathematischen Apparates. Es ist dies sicherlich keine sehr dankbare Aufgabe, aber ihre Lösung ist dringend notwendig, wenn nicht die wissenschaftliche Arbeit in einem chaotischen Zustand enden soll. Es möge hier nur kurz auf den Inhalt des groß angelegten Werkes eingegangen werden.

Die ersten zwei Kapitel sind den mathematischen Grundlagen gewidmet. Das erste gibt auf 12 Seiten eine Wiederholung der Tensoranalysis und der Eigenschaften der *Lorentz*-Gruppe, insbesondere ihrer infinitesimalen Transformationen. Kapitel 2 behandelt ausführlich die Spinoranalyse. Hier findet sich u. a.: Der Zusammenhang zwischen binären unimodularen (komplexen) Transformationen und *Lorentz*-Transformationen, infinitesimale Spinortransformationen, *Dirac*'sche Spinoren, die „irreduziblen" Tensoren und Spinoren, zusammenhängend damit die Darstellungen der *Lorentz*-Gruppe. Das nächste Kapitel ist mit „Allgemeine Feldtheorie" überschrieben. Es entwickelt „vom kanonischen Standpunkt aus" die wesentlichen feldtheoretischen Begriffe: Die Gleichungen des Variationsprinzipes, die Transformationseigenschaften der Feldvariablen, verschiedene Arten von Eichinvarianz, Wechselwirkung zwischen elektromagnetischem- und Materiefeld, Erhaltungssätze. Die letzten beiden Kapitel, die den Höhepunkt des Werkes bilden, behandeln die relativistischen Wellengleichungen vom Feld- bzw. vom korpuskularen Standpunkt (für Teilchen mit beliebigem Spin), Forschungen, die mit den Namen *Pauli*, *Dirac*, *Fierz*, *Chandra*, *Bhabha*, *Proca*, *Kemmer* u. a. m. verbunden sind. Es kann hier auf genauere Einzelheiten nicht eingegangen werden. Es sei nur noch bemerkt, daß im letzten Kapitel auch beträchtliche Hilfsmittel aus der abstrakten Algebra verwendet werden (so z. B. die Struktursätze von *Wedderburn* über hyperkomplexe Systeme, die Darstellungen der orthogonalen und der *Lorentz*-Gruppe in n-Dimensionen sowie verschiedene spezielle Algebren).

Das Buch, welches auch ein reichhaltiges Literaturverzeichnis enthält, wird für den forschenden Physiker äußerst wertvoll sein. Aber auch demjenigen ist seine Lektüre wärmstens zu empfehlen, der einen klaren Überblick über die neueste Entwicklung der theoretischen Physik zu erhalten wünscht.

K. Prachar, Wien

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien, I., Mölkerbastei 5. - Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Nikolaus Hofreiter, Wien, IV., Schelleingasse 39. - Druck: Tiroler Graphik, Ges. m. b. H., Innsbruck, Innrain 27—29.

SPRINGER-VERLAG IN WIEN I

Einführung in die symbolische Logik

mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen

Von

Rudolf Carnap

Professor der Philosophie, University of California, Los Angeles

Mit 5 Textabbildungen. X, 209 Seiten. 1954

Ganzleinen S 162.—, DM 27.—, $ 6.40, sfr. 27.50

Die symbolische Logik ist eine Grundlagenwissenschaft ersten Ranges geworden, deren Bedeutung heute vor allem in den angelsächsischen Ländern außerordentlich hoch eingeschätzt wird. Nach den Worten des Verfassers, der, aus dem „Wiener Kreis" kommend, selbst maßgeblich an der Gestaltung dieser Wissenschaft mitgewirkt hat, ist die Symbolik eine unter genauen Regeln stehende Sprache, durch deren Verwendung die Formen des eigenen Denkens verschärft werden können. So betrachtet ist die symbolische Logik ein wichtiges Werkzeug in Forschung und Unterricht und ein unentbehrliches Hilfsmittel für alle, die sich mit Erkenntnisphilosophie, Sprachanalyse, Grundlagen der Mathematik, axiomatischen Methoden und verwandten Problemen beschäftigen. Gegenüber dem 1929 erschienenen „Abriß der Logistik", der längst vergriffen und durch die Entwicklung überholt ist, ist das neue Werk des Verfassers nicht nur erheblich umfangreicher geworden, sondern geht auch insofern darüber hinaus, als es die Anwendungen in der logischen Syntax und Semantik ausführlich berücksichtigt.

Inhaltsübersicht:

System der symbolischen Logik. Die einfache Sprache A. (Die Aufgabe der symbolischen Logik. Individualkonstanten und Prädikate. Satzverknüpfungen. Die Wahrheitstafeln. L-Begriffe. L-Implikation und L-Äquivalenz. Satzvariable. Tautologische Satzformeln. All- und Existenzsätze. Prädikatvariable. Bewertungen. Einsetzungen. Lehrsätze über Operatoren. L-wahre Formeln mit Operatoren. Definitionen. Prädikate höherer Stufen. Identität: Kardinalzahlen. Funktoren. Isomorphie.) Das Sprachsystem B. (Semantische und syntaktische Systeme. Formregeln und Umformungsregeln des Kalküls B. Beweise und Ableitungen im Kalkül B. Lehrsätze über Beweisbarkeit und Ableitbarkeit. Das semantische System B. Beziehungen zwischen syntaktischen und semantischen Systemen.) Die erweiterte Sprache C. (Die Sprache C. Prädikatverknüpfungen. Identität; Extensionalität. Relationsprodukt; Relationspotenzen. Verschiedene Arten von Relationen. Weitere logische Prädikate. Funktoren und Verknüpfungen. Der λ-Operator. Äquivalenzklassen, Strukturen, Kardinalzahlen. Kennzeichnungen von Individuen. Erblichkeit und Relationsketten. Endliches und Unendliches. Stetigkeit.) — **Anwendungen der symbolischen Logik.** Formen und Methoden des Sprachaufbaues. (Dingsprachen. Koordinatensprache. Quantitative Begriffe. Die axiomatische Methode.) Axiomensysteme (ASe) der Mengenlehre und Arithmetik. (AS der Mengenlehre. Peanos AS der natürlichen Zahlen. AS der reellen Zahlen.) ASe der Geometrie. (AS der Topologie [Umgebungsaxiome]. AS der projektiven, affinen und metrischen Geometrie.) ASe der Physik. (ASe der Raum-Zeit-Topologie: 1. Das K-Z-System, 2. Das Wlin-System, 3. Das W-System. Determination und Kausalität.) ASe der Biologie. (AS der Dinge und ihrer Teile. AS einiger biologischer Begriffe. AS der Verwandtschaftsbegriffe.) Anhang: Übungsaufgaben zur Anwendung der symbolischen Logik. Literaturverzeichnis. — Literaturhinweise. — Namen- und Sachverzeichnis. — Zeichen der symbolischen Sprache und der Metasprache.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung